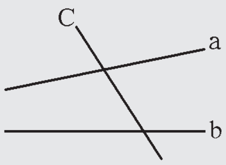
זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים

כאשר שני ישרים a ו-b נחתכים על-ידי ישר שלישי c,
מתקבלות שמונה זוויות.



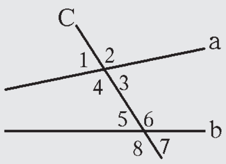
נסמן אותן במספרים מ-1 עד 8, ונמיין אותן בצורה הבאה:

הזוויות: 1,4,5,8 מונחות משמאל לישר החותך c.

הזוויות: 2,3,6,7 מונחות מימין לישר החותך c.

הזוויות: 1,2,5,6 מונחות מעל לישרים הנחתכים a ו-b.

הזוויות: 3,4,7,8 מונחות מתחת לישרים הנחתכים a ו-b.

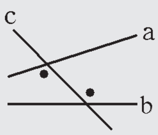


נבדיל בין שני סוגי זוויות לפי מקומן ביחס לשלושת הישרים הללו.

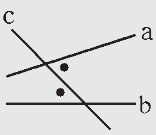
א. **זוויות מתחלפות**

שתי זוויות, הנמצאות בצדדים השונים של הישר החותך ובצדדים השונים של הישרים הנחתכים.

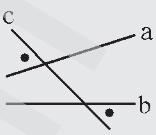
$\sphericalangle 4$ ו-$\sphericalangle 6$



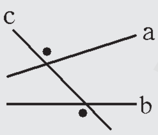
$\sphericalangle 3$ ו-$\sphericalangle 5$



$\sphericalangle 1$ ו-$\sphericalangle 7$



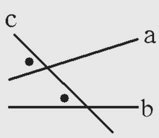
$\sphericalangle 2$ ו-$\sphericalangle 8$



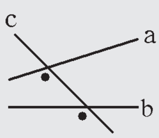
ב. **זוויות מתאימות**

שתי זוויות, הנמצאות באותו צד של הישר החותך ובאותו צד של הישרים הנחתכים.

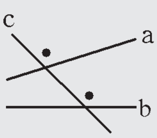
$\sphericalangle 1$ ו-$\sphericalangle 5$



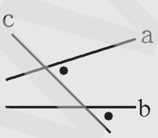
$\sphericalangle 4$ ו-$\sphericalangle 8$



$\sphericalangle 2$ ו-$\sphericalangle 6$

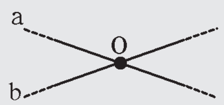


$\sphericalangle 3$ ו-$\sphericalangle 7$

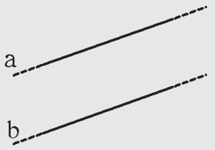


שני ישרים באותו מישור יכולים להימצא רק באחד משלושת המצבים הבאים:

א. חותכים זה את זה.
ישרים a ו–b חותכים זה את זה בנקודה O.
(שני הישרים יכולים לחתוך זה את זה בנקודה אחת בלבד.)



ב. מקבילים זה לזה.
ישרים הנמצאים באותו מישור, ואינם חותכים זה את זה, נקראים **ישרים מקבילים**.
שני הישרים a ו–b לעולם לא ייפגשו.
הסימון: $a \parallel b$ (ישר a מקביל לישר b).



ג. מתלכדים זה עם זה.
לישרים מתלכדים יש אינסוף נקודות משותפות.
(שני הישרים a ו–b מתלכדים, ולכן נראים כישר אחד.)

משפט:

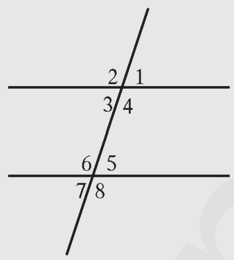
אם שני ישרים מקבילים נחתכים על–ידי ישר שלישי, אזי:

א. כל שתי זוויות מתחלפות שוות:

$\measuredangle 1=\measuredangle 7,\ \measuredangle 2=\measuredangle 8,\ \measuredangle 4=\measuredangle 6,\ \measuredangle 3=\measuredangle 5$

ב. כל שתי זוויות מתאימות שוות:

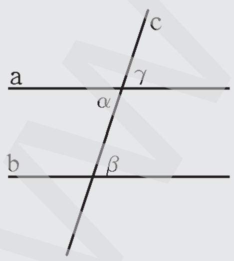
$\measuredangle 1=\measuredangle 5,\ \measuredangle 4=\measuredangle 8,\ \measuredangle 2=\measuredangle 6,\ \measuredangle 3=\measuredangle 7$



משפט הפוך:

אם שני ישרים נחתכים על–ידי ישר שלישי, וקיים:
זוג אחד של זוויות מתחלפות שוות,
או זוג אחד של זוויות מתאימות שוות,
אזי הישרים מקבילים.

לדוגמה אם: $\alpha = \beta$ או $\gamma = \beta$ $\Leftarrow$ $a \parallel b$.

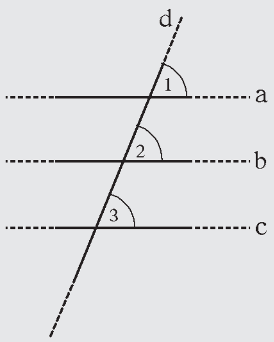


נתונים שני ישרים a ו-b המקבילים לישר שלישי c.

מה ניתן לומר על הישרים a ו-b?

דיון:

ידוע כי $a||c$ ו-$b||c$.



ממבט ראשון אפשר להניח כי גם הישרים a ו-b מקבילים זה לזה. האם נכון הדבר? או רק נדמה לנו?

נוכל לאמת הנחה זאת בקלות.
את שלושת הישרים הללו, a, b ו-c, נחתוך באמצעות ישר רביעי d.
הישר d יוצר עם כל אחד מהישרים a, b ו-c זווית; שלוש הזוויות מתאימות, נסמנן $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ ו-$\sphericalangle 3$.

ידוע כי $a||c$, ולכן $\sphericalangle 3=\sphericalangle 1$, שהרי זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו.
מאותה סיבה ידוע כי $b||c$, ולכן $\sphericalangle 3=\sphericalangle 2$.

כלומר: $\sphericalangle 3=\sphericalangle 1$ ו-$\sphericalangle 3=\sphericalangle 2$. מכאן ניתן להסיק כי $\sphericalangle 2=\sphericalangle 1$, ולכן $a||b$, כי אם שני ישרים a ו-b נחתכים על-ידי ישר שלישי d, וקיים זוג אחד של זוויות מתאימות שוות ($\sphericalangle 1=\sphericalangle 2$), אזי הישרים מקבילים זה לזה, כלומר $a||b$.

עתה נוכל לנסח את הטענה:

- **משפט:**
  אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי,
  אזי הם מקבילים זה לזה.
  אם: $a||c$, $b||c$
  $\Downarrow$
  $a||b$

בפרק זה נחזור על כל הנושאים שלמדנו בעבר, וכן נפתור תרגילים מתקדמים יותר.

איך נלמד?

√ ישנם תרגילים המסומנים על-ידי ציור של **מפתח** - ; בפתרון התרגילים הללו נגלה תכונה חדשה או כלל חדש. התרגילים מאפשרים לגלות את הכללים באופן עצמאי, ובאמצעותם ניתן לבנות את הידע בנושא. במידה ותיתקלו בבעיה, תשובות מפורטות יופיעו מיד לעזרה.

√ לאחר תרגילי ה"**מפתח**" תמצאו שאלות תרגול המחזקות את הידע החדש שנלמד עד לתרגיל ה"**מפתח**" הבא.

סיכום

- משפט:

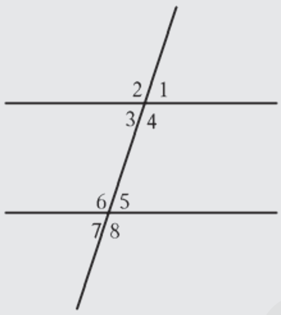
אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, אזי:

א. כל שתי זוויות מתחלפות שוות:

$\measuredangle 3=\measuredangle 5$, $\measuredangle 4=\measuredangle 6$, $\measuredangle 2=\measuredangle 8$, $\measuredangle 1=\measuredangle 7$

ב. כל שתי זוויות מתאימות שוות:

$\measuredangle 3=\measuredangle 7$, $\measuredangle 2=\measuredangle 6$, $\measuredangle 4=\measuredangle 8$, $\measuredangle 1=\measuredangle 5$



- משפט הפוך:

אם שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי וקיים:

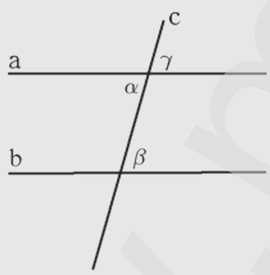
זוג אחד של זוויות מתחלפות שוות,

או

זוג אחד של זוויות מתאימות שוות,

אזי הישרים מקבילים.

לדוגמה אם: $\alpha=\beta$ או $\gamma=\beta$ $\Leftarrow$ $a \parallel b$.



- משפט:

אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי,

אזי הם מקבילים זה לזה.

אם: $a \parallel c$, $b \parallel c$

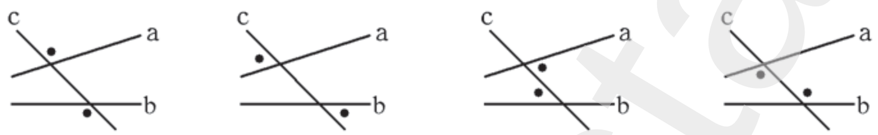
$\Downarrow$

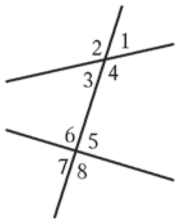
$a \parallel b$

תרגילים

1. נחזור על המושגים זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות.

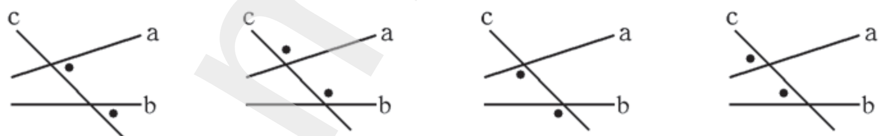
א. כאשר שני ישרים נחתכים על–ידי ישר שלישי, אזי שתי הזוויות, הנמצאות בצדדים השונים של הישר החותך ובצדדים השונים של הישרים הנחתכים, נקראות **זוויות מתחלפות**:

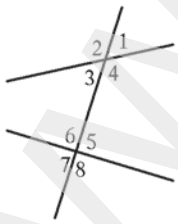




לפניכם שני ישרים הנחתכים על–ידי ישר שלישי.
ציינו את הזוגות של הזוויות המתחלפות.

ב. כאשר שני ישרים נחתכים על–ידי ישר שלישי, אזי שתי הזוויות, הנמצאות באותו צד של הישר החותך ובאותו צד של הישרים הנחתכים, נקראות **זוויות מתאימות**:



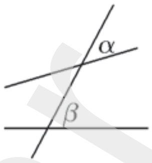


לפניכם שני ישרים הנחתכים על–ידי ישר שלישי.
ציינו את הזוגות של הזוויות המתאימות.

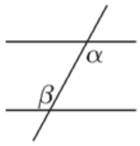
תשובות: בעמ' 220

2. בכל אחד מהסרטוטים הבאים ציינו את הסוג של שתי הזוויות המסומנות α ו-β (זוויות מתאימות, זוויות מתחלפות או זוויות שאינן מתחלפות ואינן מתאימות).

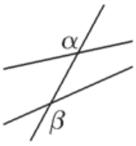
א.



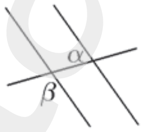
ב.



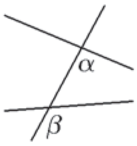
ג.



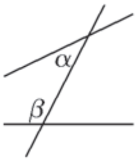
ד.



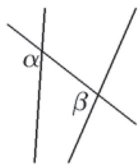
ה.



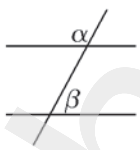
ו.



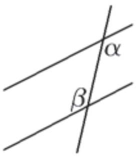
ז.



ח.



ט.



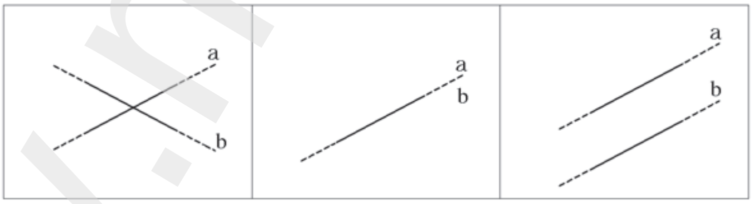
תשובות: בעמ' 220

3. **א.** בעבר למדנו כי שני ישרים, הנמצאים באותו מישור, יכולים להימצא רק באחד משלושת המצבים הבאים:

- √ חותכים זה את זה – לשני הישרים יש נקודה אחת משותפת.
- √ מקבילים זה לזה – לשני הישרים אין נקודה משותפת.
- √ מתלכדים זה עם זה – לשני הישרים יש אינסוף נקודות משותפות.

לפניכם שלושה סרטוטים:

סרטוט מס' 1   סרטוט מס' 2   סרטוט מס' 3

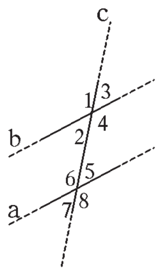


I. האם הישרים a ו-b שבסרטוט 1 הם ישרים חותכים, מקבילים או מתלכדים?

II. האם הישרים a ו-b שבסרטוט 2 הם ישרים חותכים, מקבילים או מתלכדים?

III. האם הישרים a ו-b שבסרטוט 3 הם ישרים חותכים, מקבילים או מתלכדים?

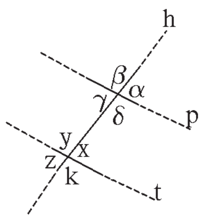
ב. לפניכם שני ישרים מקבילים, $a||b$, הנחתכים על-ידי הישר השלישי c.



I. מה תוכלו לומר לגבי גודלן של הזוויות המתחלפות $\measuredangle 2$ ו-$\measuredangle 5$?

II. קבעו אם נכונה הטענה: "אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, אזי כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו".
אם כן, ציינו את השוויונות בין כל שתי זוויות מתחלפות.

ג. לפניכם שני ישרים מקבילים, $t||p$, הנחתכים על-ידי הישר השלישי h.



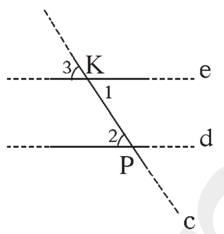
I. מה תוכלו לומר לגבי גודלן של הזוויות המתאימות γ ו-z?

II. קבעו אם נכונה הטענה: "אם שני ישרים מקבילים נחתכים על-ידי ישר שלישי, אזי כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו".
אם כן, ציינו את השוויונות בין כל שתי זוויות מתאימות.

תשובות: בעמ' 220

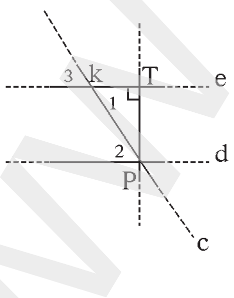
4. הוכיחו את המשפט:

"ישר, החותך ישרים מקבילים, יוצר זוויות מתחלפות שוות וזוויות מתאימות שוות".
(ראו משפט מפורט בתיאוריה)
לפניכם הניסוח המפורש של הנתונים ושל ההוכחה.
העתיקו למחברתכם והשלימו את החסר.

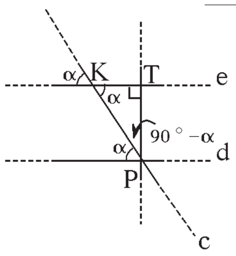


נתון: $e || d$
צ"ל: $\measuredangle 2 = \measuredangle 1$
$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$

הוכחה:
בניית עזר – דרך הנקודה P נעביר ישר PT, המאונך לישר e ($PT \perp e$)



טענה	נימוק
$PT \perp e$	בניית עזר
$e \| d$	______
$\Downarrow$	
$PT \perp d$	ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם ______.



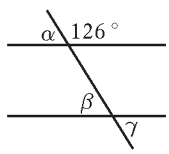
טענה	נימוק
$\measuredangle 1 = \alpha$	סימון
$\Downarrow$	
$\measuredangle KPT = 90^\circ - \alpha$	סכום הזוויות החדות במשולש ישר-הזווית $\triangle KTP$ שווה ל-______
$\measuredangle 2 = 90^\circ - \measuredangle KPT$	הוכחנו $PT \perp d$
$\Downarrow$	
$\measuredangle 2 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) =$	
$= 90^\circ -$ ______ $+$ ______ $=$ _____	
$\Downarrow$	
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 =$ ______	כלל המעבר
$\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = \alpha$	זוויות _________
$\Downarrow$	
$\measuredangle 3 = \measuredangle 2 =$ ______	__________________

מש"ל

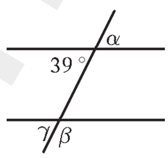
תשובות: בעמ' 220

5. בכל אחד מהסרטוטים הבאים נתונים שני ישרים מקבילים, הנחתכים על-ידי ישר שלישי. מצאו את גודלן של α, β, γ, ונמקו את תשובתכם.

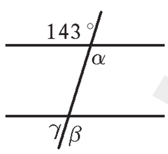
א.



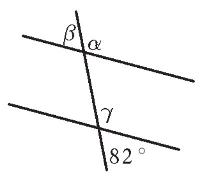
ב.



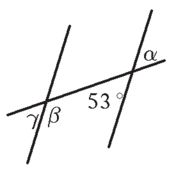
ג.



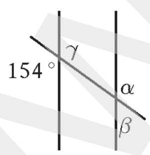
ד.



ה.



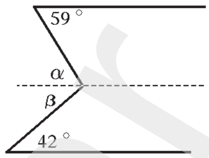
ו.



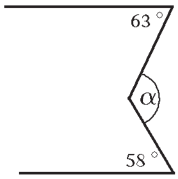
תשובות: בעמ' 220

6. בכל אחד מהסרטוטים הבאים נתונים שני ישרים מקבילים,
מצאו את α ו- β.

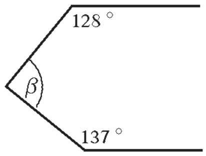
א.



ב.



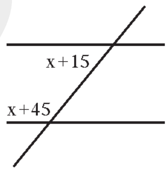
ג.



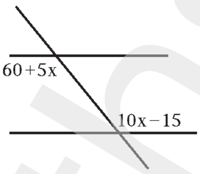
תשובות: בעמ' 220

7. בכל אחד מהסרטוטים הבאים נתונים שני ישרים מקבילים,
הנחתכים על-ידי ישר שלישי. מצאו את x.

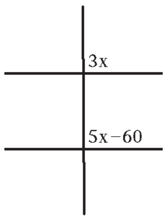
א.



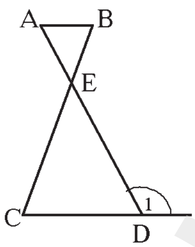
ב.



ג.

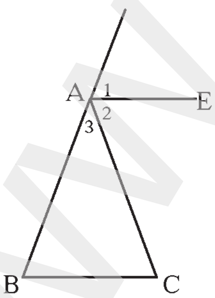


תשובות: בעמ' 220



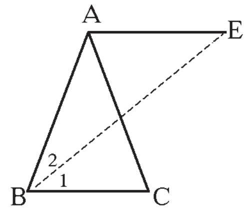
8. נתון: $AB \parallel CD$, $\sphericalangle B = 73^\circ$, $\sphericalangle A = 65^\circ$.
א. חשבו את הזוויות $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D_1$.
ב. האם $\triangle AEB \sim \triangle DEC$? הסבירו את תשובתכם.
ג. נתון: $DE = 2.1$ ס"מ, $AE = 1.4$ ס"מ, $CE = 1.5$ ס"מ,
חשבו את EB.

תשובות: בעמ' 220

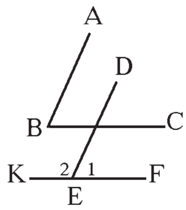


9. נתון: $\triangle ABC$ שווה-שוקיים $(AB = AC)$,
$AE \parallel BC$, $\sphericalangle B = 72^\circ$.
חשבו את הזוויות: $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle A_2$, $\sphericalangle A_3$.

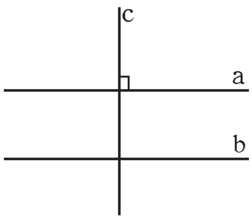
תשובה: בעמ' 220



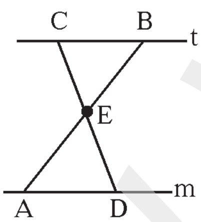
10. $\triangle ABC$ שווה–שוקיים ($AB = AC$).
BE הוא חוצה זווית $\measuredangle ABC$.
נתון: $BC \parallel AE$, $\measuredangle C = 70°$.
חשבו את הזווית $\measuredangle E$.
תשובה: בעמ' 220



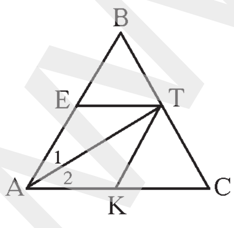
11. **נתון:** $AB \parallel DE$, $BC \parallel KF$.
הוכיחו: א. $\measuredangle B = \measuredangle E_1$.
ב. $\measuredangle B + \measuredangle E_2 = 180°$.



12. אם ישר מאונך לאחד משני ישרים מקבילים, הוא מאונך גם למקביל השני.
כלומר הוכיחו:
אם $a \parallel b$ **ו-** $c \perp a$, **אז** $c \perp b$.

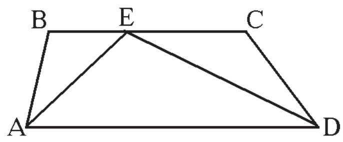


13. **נתון:** שני ישרים t **ו-** m, $t \parallel m$.
הנקודה E היא אמצע הקטע AB.
הוכיחו: $CE = DE$.

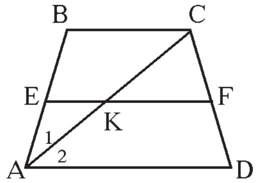


14. **נתון:** $\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$, $TK \parallel AB$, $ET \parallel AC$.
הוכיחו: א. $AE = TE$.
ב. $AK = TK$.

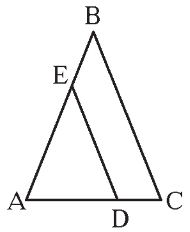
15. AE הוא חוצה זווית $\sphericalangle BAD$,
DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle CDA$.
נתון: $BC \parallel AD$.
הוכיחו: $BC = AB + DC$.



16. **נתון:** $BC \parallel EF \parallel AD$,
$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.
הוכיחו: $EB = BC - EK$.



17. המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה-שוקיים $(AB = CB)$.
נתון: $ED \parallel BC$.
הוכיחו: $DE + EB = BC$.

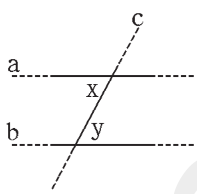


18. **א.** נתונים שני ישרים a ו-b, הנחתכים על-ידי ישר שלישי c.

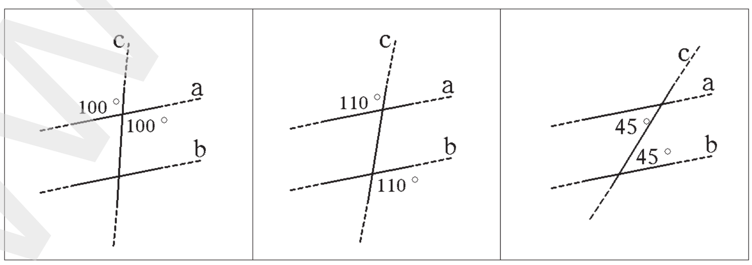
I. ידוע כי הזוויות המתחלפות x ו-y שוות זו לזו,
כלומר: $x=y$. מה תוכלו לומר על הישרים a ו-b?

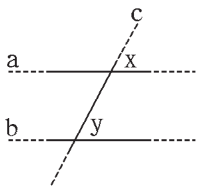
II. קבעו אם נכונה הטענה: "אם שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי וקיים זוג אחד של זוויות מתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים זה לזה".

III. אם כן, קבעו באיזה משלושת הסרטוטים הנתונים הישרים מקבילים. הסבירו את תשובתכם.



סרטוט מס' 1 | סרטוט מס' 2 | סרטוט מס' 3





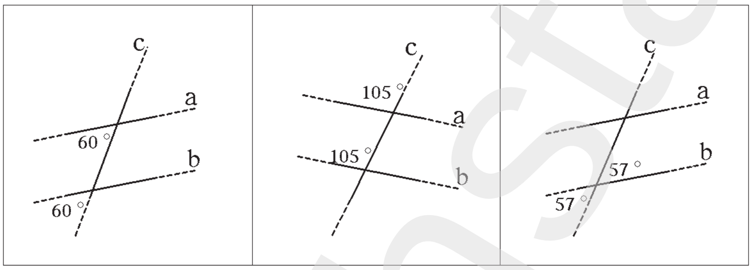
ב. נתונים שני ישרים a ו-b, הנחתכים על-ידי ישר שלישי c.

I. ידוע כי הזוויות המתאימות x ו-y שוות זו לזו, כלומר $x=y$. מה תוכלו לומר על הישרים a ו-b?

II. קבעו אם נכונה הטענה: "אם שני ישרים נחתכים על-ידי ישר שלישי וקיים זוג אחד של זוויות מתאימות שוות, אזי הישרים מקבילים זה לזה".

III. אם כן, קבעו באיזה משלושת הסרטוטים הנתונים הישרים מקבילים. הסבירו את תשובתכם.

סרטוט מס' 1   סרטוט מס' 2   סרטוט מס' 3

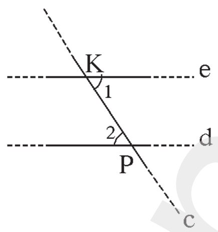


תשובות: בעמ' 220

19. הוכיחו את המשפט ההפוך:

אם ישר החותך שני ישרים יוצר זוויות מתחלפות שוות או זוויות מתאימות שוות אזי הישרים מקבילים.

(ראו משפט מפורט בתיאוריה)



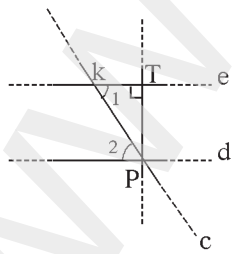
I. לפניכם הניסוח המפורש של הנתונים ושל ההוכחה.
העתיקו למחברתכם והשלימו את החסר.

נתון: $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

צ"ל: $e \parallel d$

הוכחה:

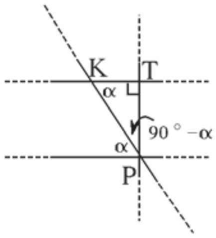
בניית עזר – דרך הנקודה P נעביר ישר PT המאונך לישר e.



טענה	נימוק
$\measuredangle 1 = \alpha$	סימון
$\Downarrow$	
$\measuredangle KPT = 90° - $ ______	סכום הזוויות החדות במשולש ישר-הזווית $\triangle KPT$ שווה ל- °______
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \alpha$	______________

טענה	נימוק
$\sphericalangle KPT+\sphericalangle 2=90^\circ-\alpha+\alpha=$____	
$\Downarrow$	
$PT \perp d$	ישרים, שיש ביניהם זווית בת 90°, הם ישרים מאונכים.
$PT \perp e$	בניית ________.
$\Downarrow$	
$d \parallel e$	ישרים הניצבים לאותו ישר ______ זה לזה.

מש"ל

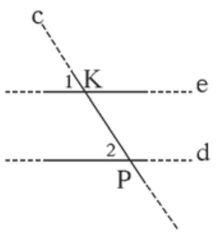


II. לפניכם הניסוח המפורש של הנתונים הוכיחו את הטענה הבאה:

נתון: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$

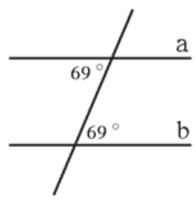
צ"ל: $e \parallel d$

תשובות: בעמ' 220

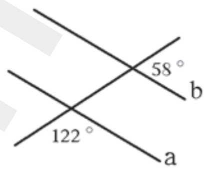


20. בכל אחד מהסרטוטים הבאים ציינו אם הישרים a ו- b מקבילים. נמקו.

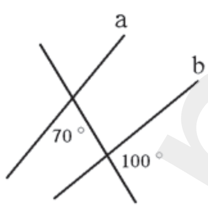
א.



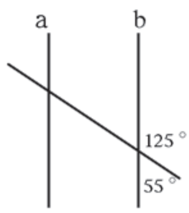
ב.



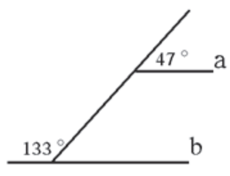
ג.



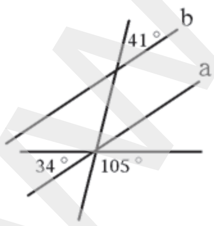
ד.



ה.



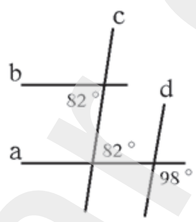
ו.



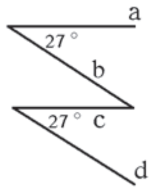
תשובות: בעמ' 220

21. בכל אחד מהסרטוטים הבאים ציינו את הישרים המקבילים. נמקו.

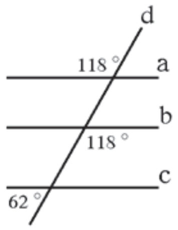
א.



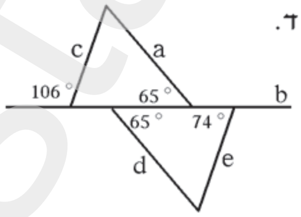
ב.



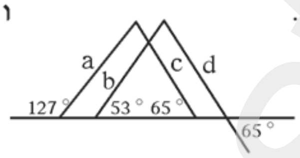
ג.



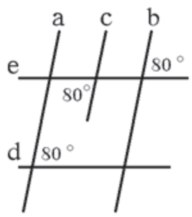
ד.



ה.

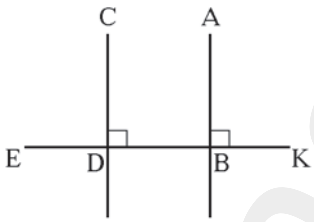


ו.



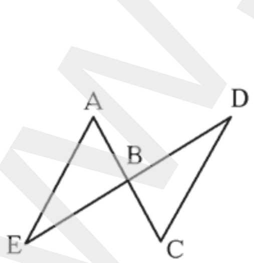
תשובות: בעמ' 220

22. הוכיחו: שני ישרים, המאונכים לישר שלישי,
מקבילים זה לזה.
כלומר הוכיחו:
אם $AB \perp EK$ **ו -** $CD \perp EK$ **אזי** $AB \parallel CD$.

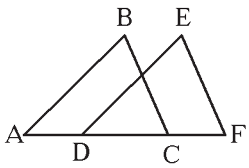


23. הוכיחו:
אם שני ישרים מקבילים לישר שלישי, אזי הם
מקבילים ביניהם.
כלומר אם: $a \parallel b$ **ו-** $b \parallel c$, **אז** $a \parallel c$.

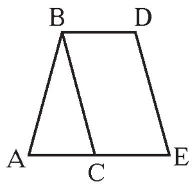
24. הנקודה B היא אמצעי הקטעים ED ו- AC.
הוכיחו: $AE \parallel CD$.



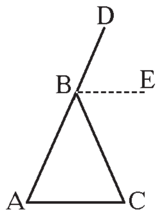
25. נתון: $\measuredangle EFD = \measuredangle BCA$, $AD = FC$,
$BC = EF$.
הוכיחו: $AB \parallel DE$.



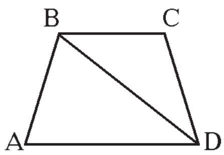
26. המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה-שוקיים $(AB = CB)$.
נתון: $\measuredangle E = \measuredangle A$.
הוכיחו: $BC \parallel DE$.



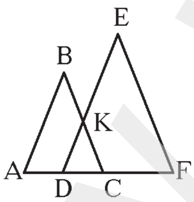
27. המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה-שוקיים $(BA = BC)$.
BE הוא חוצה הזווית החיצונית $\measuredangle DBC$.
נתון: $\measuredangle C = \measuredangle DBE$.
הוכיחו: $BE \parallel AC$.



28. BD הוא חוצה זווית $\measuredangle ADC$.
נתון: $BC = DC$.
הוכיחו: $BC \parallel AD$.



29. המשולשים $\triangle ABC$, $\triangle DEF$
שווי שוקיים $(BA = BC$, $ED = EF)$.
נתון: $\measuredangle BAC = \measuredangle EDF$.
א. הוכיחו: $BC \parallel EF$.
ב. הוכיחו: $\measuredangle DKC = \measuredangle E$



30. נתון: $BC \perp AB$, $BC \perp DC$, $DO = BO$.
הוכיחו: א. $AB \parallel DC$.
ב. $EB = FD$.