

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	$20 \times 2$	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה במישור	—	$20 \times 1$	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות	—	$20 \times 2$	—	40 נקודות
		סך הכול	—	100	נקודות	

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

## השאלות

**שים לב:** הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

### פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – 20 נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.

התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים. בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.



נתון: טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00.

טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.

מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

**א.** באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

**ב.** לפניך שני היגדים II-I. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

2. בסדרה  $a_n$  נתון כי לכל  $n$  טבעי, סכום  $n$  האיברים הראשונים של הסדרה הוא  $S_n = 2 \cdot 3^n - 2$ .

א. (1) מצא את  $a_1$  ואת האיבר הכללי של הסדרה  $a_n$  בעבור  $n > 1$ .

(2) הראה כי  $a_n$  היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה  $c_n = S_{n+1} - S_n$ .

ב. (1) הראה כי הסדרה  $c_n$  היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל  $k$  טבעי הסכום של  $k$  האיברים הראשונים בסדרה  $c_n$  גדול פי 3 מן הסכום של

$k$  האיברים הראשונים בסדרה  $a_n$ .

3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים).

נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא  $\frac{3}{5}$  ממספר הנוסעים לאירופה.

בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- $P$  את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה.

בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.

נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62.

נתון:  $P > 0.4$ .

א. מצא את  $P$ .

ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו.

התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה.

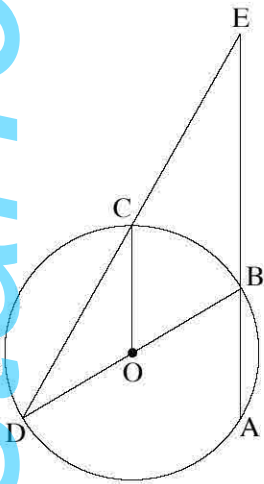
בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת.

מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

**פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)**

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

**שים לב:** אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.

הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.

BD הוא קוטר במעגל.

הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח:  $\angle AED = \angle CDO$ .

ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון:  $\frac{EB}{BA} = 2$ .

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9.

מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו-ABO  $(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO})$ .

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ( $AB = AC$ ) ששניי

מקודקודיו, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור.

המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה.

נסמן:  $\angle BAK = \alpha$ ,  $\angle KAC = \beta$ .

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל-r.

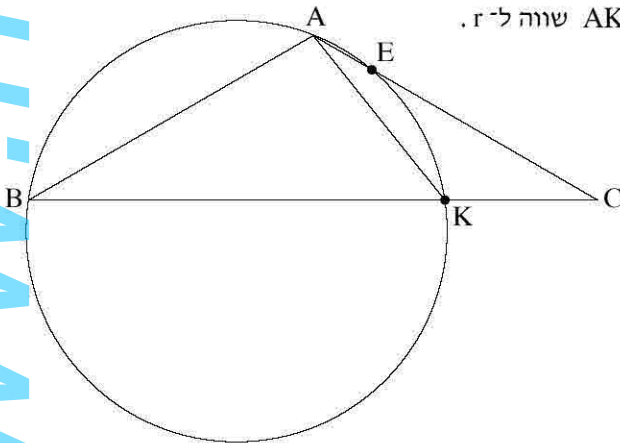
(2) הוכח:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BK}{KC}$ .

ידוע:  $\angle ABK > \beta$ , נתון:  $\alpha + \beta = 120^\circ$ .

ב. הראה כי  $\alpha$  היא זווית קהה.

נתון:  $AK = 28$ ,  $BK = 55$ .

ג. חשב את  $\alpha$  ואת אורך הקטע BC.



**פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,  
של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות  
ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

**שים לב:** אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x + 3)^4(2 - x)$  המוגדרת לכל  $x$ .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$ .

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $g(x)$ ?

(2) האם הפונקציה  $g(x)$  חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $g(x)$ ?

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $g(x)$ .

ג. (1) הראה כי  $f(x) \geq 48$  לכל  $-1 \leq x \leq 1$ .

(2) הסבר מדוע  $\int_2^4 g(x) dx \leq \frac{1}{24}$ .

7. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a}}{x^2}$ .  $a \neq 0$  הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות  $a$ , והבחן בין  $a > 0$  ובין  $a < 0$ .

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$ .

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראה שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה  $f(x)$  המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a > 0$  וסקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  בעבור  $a < 0$ .

בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר  $a$ .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר  $a$  גרף הפונקציה  $f(x)$  חותך את הישר  $y = 1$  או משיק לו.

8. המשולש ABC חסום במעגל.

נתון:  $AC = 2$ ,  $AB = 1$ .

נסמן:  $\sphericalangle BAC = x$ .

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל-  $\frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{2 \sin x}$ .

(2) מצא את הערך של  $x$  שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה-  $x$  שמצאת בסעיף א(2).

**בהצלחה!**