

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד, יש לרשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על חמש מן השאלות 1-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. ארבעה רצים משתתפים במרוץ שליחים במסלול שאורכו 1,440 מטר. המסלול מחולק ל-4 מקטעים שווים ובתחילת כל מקטע עומד אחד מן הרצים.

כאשר נשמעת יריית הזינוק הרץ הראשון יוצא לדרך. מייד כשהוא מגיע לסוף המקטע הראשון, הרץ השני יוצא לדרך, וכך הלאה עד שהרץ הרביעי מגיע לסוף המקטע שלו.

מהירות הרץ השני גדולה פי 1.5 ממהירות הרץ הראשון. מהירות הרץ השלישי קטנה פי 2 ממהירות הרץ השני, ומהירות הרץ הרביעי שווה למהירות הרץ השלישי. המהירות של כל אחד מן הרצים קבועה לאורך המקטע שלו.

ארבעת הרצים השלימו יחד את המסלול כולו בשלוש דקות ו-54 שניות סך הכול.

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם.

כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול. כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת. סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.4 מסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.

הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת.

הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב-5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. (1) מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.

(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

2. נתונה סדרה הנדסית אינ-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $12,288 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 3,072$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 6$.

ג. (1) קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k .

ד. מן הסדרה A בונים את הסדרה האינ-סופית B באופן הזה: $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

הסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי-זוגיים

כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם: $-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

ה. מצאו את סכום הסדרה C .

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.

בסקר השתתפו אנשים רבים – מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה,

ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $3\frac{1}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם

שולטים באנגלית.

ג. (1) הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{14}$.

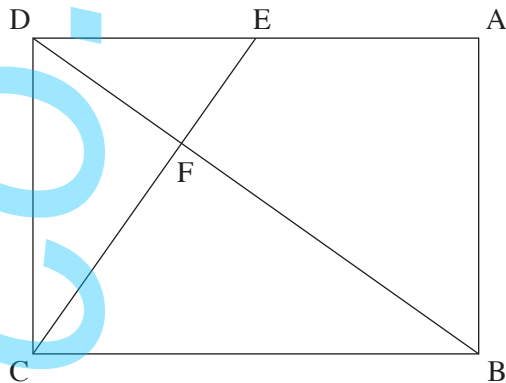
ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה

להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "לשולט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.

המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.

א. הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.

נתון: $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב-S.

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו-BFC באמצעות S.

ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.

נסמן: $DE = a$.

ה. (1) הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

5. נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.

מנקודה A, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D

וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle AOD = \alpha$, $\angle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו-R, אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO.

(2) אורך הקטע AB.

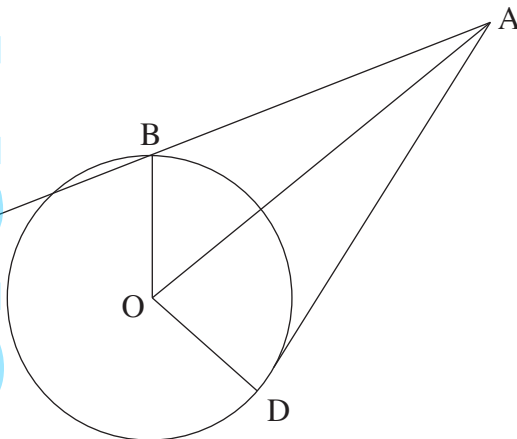
נתון: $AB = \sqrt{2} R$.

ב. הוכיחו כי $\cos \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r.

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - 36}{\sqrt{x + a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. (1) מצאו את a .

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $h(x) = |f(x)|$, $g(x) = -f(x + 2)$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ גדול משיעור ה- y של נקודת המקסימום

של הפונקצייה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-2}^6 h(x) dx = \int_{-4}^k g(x) dx$, $k > -4$.

ד. מצאו את k . הסבירו את התשובה.

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x) - 1$, המוגדרת לכל x .

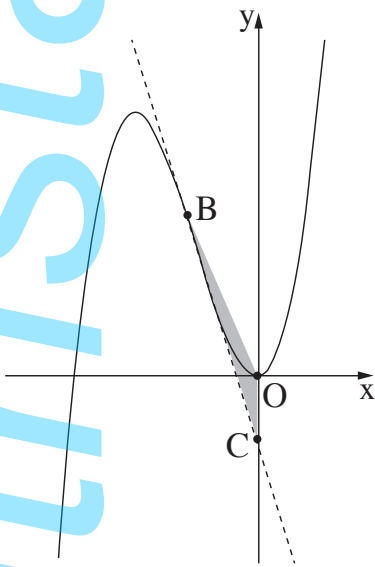
- א. האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.
 - ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2 \leq f(x) \leq 0$.
 - ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
 - ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.
- נתונה הפונקצייה $g(x) = f(2x)$, המוגדרת לכל x .
- ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (g'(x) - f'(x)) dx = S$.

הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^0 (g'(x) - f'(x)) dx$. הסבירו את התשובה.

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^3 + 6x^2$, המוגדרת לכל x .

- הנקודה B נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט).
 - מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.
 - המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C .
 - נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B .
- א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה B .
 - ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .
 - ב. מהו תחום הערכים של t ?
 - הנקודה O היא ראשית הצירים.
 - ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC .



בהצלחה!