

מתמטיקה 5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים — $2 \times 33\frac{1}{3}$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $1 \times 33\frac{1}{3}$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סך הכול — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. הישר $4x - 3y = 0$ משיק למעגל שמרכזו $(5a, 0)$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את משוואת המעגל באמצעות a .

ב. הנקודה G , הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר, המשיק למעגל בנקודה K .

ג. הבע באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות G שבעבורן המרחק GK שווה למרחק שלהן

מן הישר $x = -3a$ וצייר סקיצה שלו.

נתון: אורך הקטע GK הקצר ביותר האפשרי הוא 7.5.

ג. (1) מה הם שיעורי הנקודה G שבעבורה אורך הקטע GK הוא 7.5? נמק.

(2) מצא את ערכו של הפרמטר a . נמק.

2. נתונים שני ישרים: $\ell_1: \underline{x} = (6, 10, -7) + k(3, 5, -4)$

$\ell_2: \underline{x} = (15, 0, 6) + t(9, 0, 13)$

ונתון הווקטור $\underline{u} = (6, 0, -8)$.

הנקודה A נמצאת על הישר ℓ_1 והנקודה C נמצאת על הישר ℓ_2 כך ש- $\overrightarrow{AC} = \underline{u}$.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו- C .

$SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה, ABC , הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

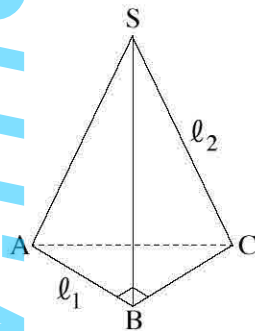
הנקודה S נמצאת על הישר ℓ_2 והנקודה B נמצאת על הישר ℓ_1 .

ב. מצא את שיעורי הנקודה B .

ג. מצא את משוואת המישור ABC .

ד. הנקודה C העלו אנך למישור ABC .

חשב את הזווית שבין האנך ובין הישר ℓ_2 .



3. z הוא מספר מרוכב.

א. פתור את המשוואה $z^5 = 2^5$.

הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n במישור גאוס מתאימות לפתרונות המשוואה $z^n = 2^n$ ($n \geq 3$ הוא מספר טבעי).

חיברו את הנקודות A_1, A_2, \dots, A_n ויצרו מצולע משוכלל קמור.

נתון כי שטח המצולע שהתקבל שווה ל- n .

ב. מצא את n .

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור הערך של n שמצאת בסעיף ב.

הוא פתרון של המשוואה $z^n = 2^n$ כך ש- $a \cdot b > 0$ [כלומר: $\text{Re}(w) \cdot \text{Im}(w) > 0$].

ג. באילו רביעים נמצאים פתרונות w כאלה?

ארבע הנקודות הנמצאות ברביעים שמצאת בסעיף ג הן קודקודיו של מלבן.

אם מכפילים כל אחד מן המספרים המתאימים לארבע הנקודות הללו

במספר $z_0 = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), מתקבל מלבן חדש, שצלעותיו מקבילות לצירים.

ד. מצא את הזווית θ . נמק.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 נקודות)

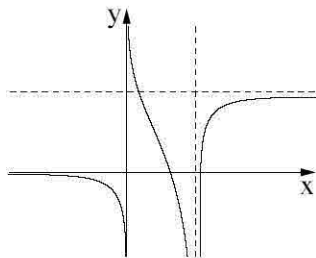
ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

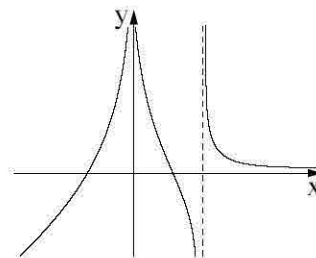
4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - ae^x + 3}$. a הוא פרמטר.

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בעבור $x = 0$.

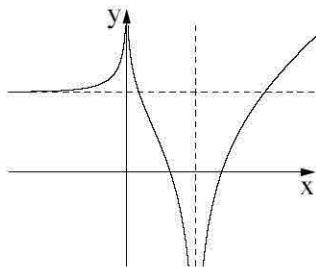
- א. (1) מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (2) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
- (3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$. איזה מהם מתאר אותה? נמק.
- ד. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x + k)$. עבור איזה ערך של $k \neq 0$ יש לפונקציה $h(x)$ אסימפטוטה שמשוותה היא $x = 0$? נמק.



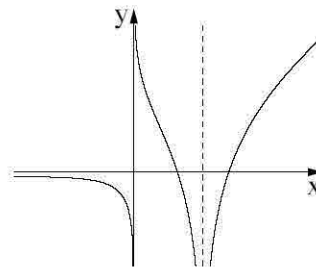
II



I



IV



III

5. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x .

א. הראה כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $\ln(f(x))$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x ונקודות הקיצון הללו הן מאותו הסוג (מינימום/מקסימום).

בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, כך ש- $f(x)$ ו- $g(x) = \ln(f(x))$ מוגדרות וגזירות לכל x . לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון יחידה ששיעוריה הם $(1, 2)$, ושתי אסימפטוטות:

אסימפטוטה שמשוואתה היא $y = 1$,

ואסימפטוטה נוספת שמשוואתה היא $y = \frac{2}{3}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y כאשר $y = 1$.

ענה על סעיף ב בהסתמך על הגרף המתואר בציור.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$? נמק.

(2) מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(3) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

(4) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x) = f(x) - g(x)$.

לפניך סרטוט של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

קבע את סוגן בעזרת הגרף.

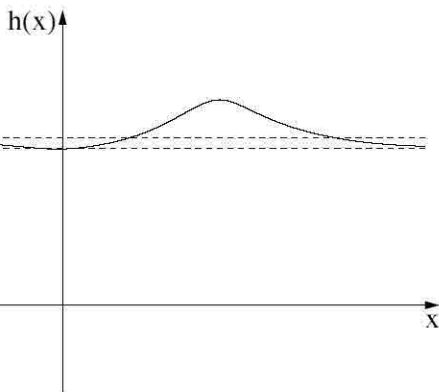
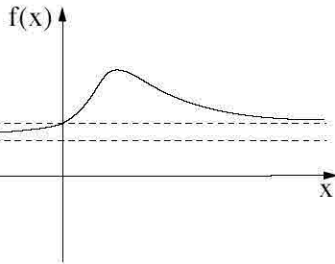
(2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

כך שהקטע AB מאונך לציר ה- x .

מהו שיעור ה- x שבעבורו אורך הקטע AB הוא 1?

נמק.



בהצלחה!