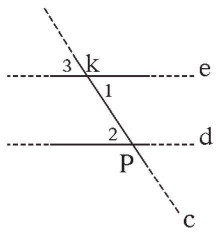
נספח ב' – הוכחות משפטים

זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים

(הוכחות משפטים)

תרגיל 4 עמ' 211

"ישר, החותך ישרים מקבילים, יוצר זוויות מתחלפות שוות וזוויות מתאימות שוות".



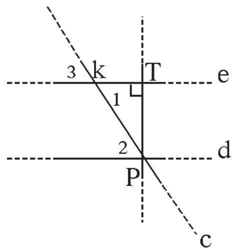
נתון: $e \parallel d$

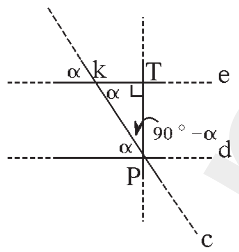
צ"ל: $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 2$

הוכחה:

בניית עזר – דרך הנקודה P נעביר ישר PT המאונך לישר e $(PT \perp e)$

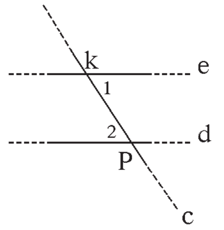




טענה	נימוק
$PT \perp e$	בניית עזר
$e \parallel d$ $\Downarrow$	נתון
$PT \perp d$	ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לישר השני.
$\measuredangle 1 = \alpha$ $\Downarrow$	סימון
$\measuredangle KPT = 90^\circ - \alpha$	סכום הזוויות החדות במשולש ישר-הזווית $\triangle KTP$ שווה ל-90°
$\measuredangle 2 = 90^\circ - \measuredangle KPT$ $\Downarrow$ $\measuredangle 2 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) =$ $= 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$ $\Downarrow$	הוכחנו $PT \perp d$
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \alpha$	כלל המעבר
$\measuredangle 1 = \measuredangle 3 = \alpha$ $\Downarrow$	זוויות קודקודיות שוות
$\measuredangle 3 = \measuredangle 2 = \alpha$	כלל המעבר
	מש"ל

תרגיל 19 עמ׳ 216

I. **"אם ישר החותך שני ישרים יוצר זוויות מתחלפות שוות או זוויות מתאימות שוות אזי הישרים מקבילים"**

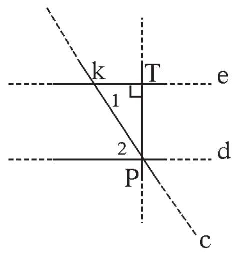


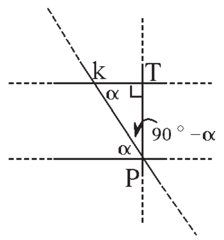
נתון: $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

צ"ל: $e \parallel d$

הוכחה:

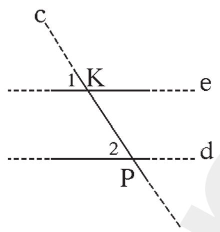
בניית עזר – דרך הנקודה P נעביר ישר PT המאונך לישר e.





טענה	נימוק
$\measuredangle 1 = \alpha$	סימון
$\Downarrow$	
$\measuredangle KPT = 90^\circ - \alpha$	סכום הזוויות החדות במשולש ישר–הזווית $\triangle KPT$ שווה ל– 90°
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \alpha$	נתון
$\measuredangle KPT + \measuredangle 2 = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$	
$\Downarrow$	
$PT \perp d$	ישרים שיש ביניהם זווית בת 90° הם ישרים מאונכים.
$PT \perp e$	בניית עזר.
$\Downarrow$	
$d \parallel e$	ישרים הניצבים לאותו ישר מקבילים זה לזה.
	מש"ל

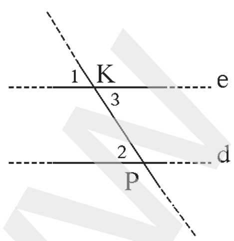
II. לפניכם הניסוח המפורש של הנתונים הוכיחו את הטענה הבאה:



נתון: $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$

צ"ל: $e \parallel d$

הוכחה:

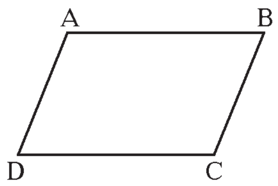


טענה	נימוק
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$	נתון
$\measuredangle 1 = \measuredangle 3$	זוויות קודקודיות שוות
$\Downarrow$	
$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$	כלל המעבר
$\Downarrow$	
$e \parallel d$	אם הזוויות המתחלפות שוות אזי הישרים מקבילים (הוכחנו משפט זה בסעיף I)
	מש"ל

מקבילית

(הוכחות משפטים)

תרגיל 5 עמ׳ 224



א. • **במקבילית הצלעות הנגדיות שוות זו לזו.**

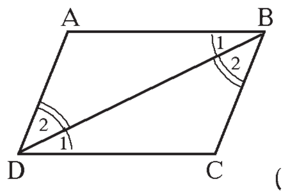
• **במקבילית הזוויות הנגדיות שוות זו לזו.**

כלומר:

נתון: $ABCD$ מקבילית $(AB \parallel DC\ ,\ BC \parallel AD)$.

צ"ל: $AB=DC\ ,\ BC=AD\ ,\ \measuredangle A=\measuredangle C\ ,\ \measuredangle D=\measuredangle B$

נחלק את המקבילית לשני משולשים באמצעות אחד האלכסונים ונוכיח כי שני המשולשים חופפים.



הוכחה:

בניית עזר: נעביר אלכסון BD.

נתבונן במשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle CDB$.

ז. $\measuredangle B_1=\measuredangle D_1$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

צ. $BD=BD$ (צלע משותפת)

ז. $\measuredangle B_2=\measuredangle D_2$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (לפי המשפט ז.צ.ז.)

$\Downarrow$

$\boxed{AB=DC\ ,\ BC=AD}$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)

$\boxed{\measuredangle A=\measuredangle C}$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

הוכחנו שוויון בין הצלעות הנגדיות במקבילית, ושוויון בין זוג אחד של זוויות נגדיות, $\measuredangle A=\measuredangle C$. כדי להוכיח שוויון בין הזוג האחר של זוויות נגדיות, ניתן להעביר את האלכסון השני ושוב להוכיח כי המשולשים שהתקבלו הם חופפים או לבצע חיבור של זוויות שוות כדלקמן:

$\measuredangle B_1=\measuredangle D_1$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

$\measuredangle B_2=\measuredangle D_2$ (זוויות מתחלפות בין ישירם מקבילים)

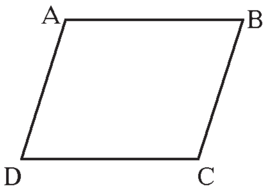
$\measuredangle B_1+\measuredangle B_2=\measuredangle D_1+\measuredangle D_2$ (חיבור זוויות שוות)

$\Downarrow$

$\measuredangle B = \measuredangle D$

מ.ש.ל. (מה שצריך להוכיח)

ב. במקבילית סכומן של כל שתי זוויות סמוכות הוא 180°.



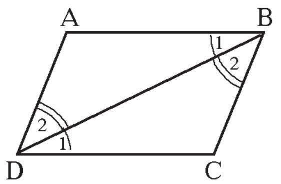
כלומר:

נתון: ABCD מקבילית $(AB \parallel DC ,BC \parallel AD)$.

צ"ל: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$,

$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$.

נוכיח את נכונות הטענה לגבי זוג אחד של זוויות סמוכות, לדוגמה $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle D$, לגבי זוגות אחרים תהליך ההוכחה יהיה זהה. לשם כך נעביר את האלכסון BD במקבילית ABCD.



הוכחה:

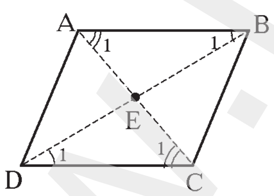
בניית עזר: נעביר אלכסון BD.

נתבונן במשולש $\triangle ABD$.

טענה	נימוק
$\sphericalangle A+\sphericalangle B_1+\sphericalangle D_2=180^\circ$	סכום הזוויות במשולש הוא 180°.
$\sphericalangle B_1=\sphericalangle D_1$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים
$\Downarrow$	
$\sphericalangle A+\sphericalangle D_1+\sphericalangle D_2=180^\circ$	הצבת גודל תמורת גודל השווה לו.
$\sphericalangle D_1=\sphericalangle D_2=\sphericalangle D$	
$\Downarrow$	
$\sphericalangle A+\sphericalangle D=\sphericalangle 180^\circ$	

מ.ש.ל.

ג. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.



נתון: ABCD מקבילית $(AB \parallel DC ,BC \parallel AD)$.

צ"ל: $AE = CE$, $BE = DE$.

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle ABE$ ו- $\triangle CDE$.

ז. $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle D_1$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

צ. $AB = CD$ (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)

ז. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle C_1$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

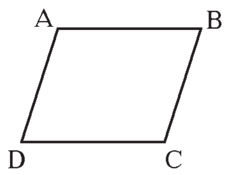
$\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (לפי משפט חפיפה ז.צ.ז.)

$\Downarrow$

$AE = CE$, $BE = DE$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)

מש"ל

תרגיל 28 עמ' 233



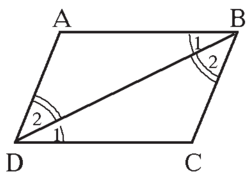
א. מרובע שכל שתי צלעותיו הנגדיות שוות, הוא מקבילית.

נתון: $ABCD$ מרובע, $AB = DC$, $BC = AD$.

צ"ל: $ABCD$ מקבילית ($AD \parallel BC$, $DC \parallel AB$).

הוכחה:

בניית עזר: נעביר אלכסון BD.



נתבונן במשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle CDB$.

צ. $AB = CD$ (נתון)

צ. $BC = DA$ (נתון)

צ. $BD = BD$ (צלע משותפת)

$\Downarrow$

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (לפי משפט חפיפה צ.צ.צ.)

$\Downarrow$

$\measuredangle B_1 = \measuredangle D_1$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

$\boxed{AB \parallel DC}$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

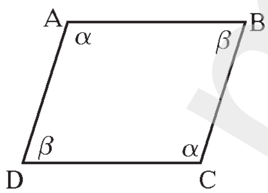
$\measuredangle B_2 = \measuredangle D_2$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

$\boxed{BC \parallel AD}$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

מש"ל

ב. מרובע שכל שתי זוויותיו הנגדיות שוות, הוא מקבילית.



נתון: $ABCD$ מרובע, $\measuredangle A = \measuredangle C$, $\measuredangle B = \measuredangle D$.

צ"ל: $ABCD$ מקבילית ($AD \parallel BC$, $DC \parallel AB$).

הוכחה:

נסמן: $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle D = \beta$

$\measuredangle A = \measuredangle C = \alpha$ (נתון)

$\measuredangle B = \measuredangle D = \beta$ (נתון)

$\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle B + \measuredangle D = 360^\circ$ (סכום הזוויות במרובע 360°)

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 360^\circ$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

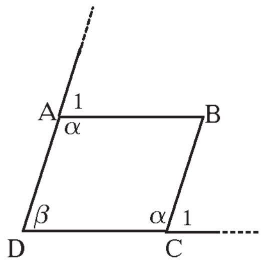
$\Downarrow$

$2\alpha + 2\beta = 360^\circ \quad / :2$

$\alpha + \beta = 180^\circ$

$\Downarrow$

$\beta = 180^\circ - \alpha$



בניית עזר: נאריך את הצלע AC מעבר לנקודה A
ואת הצלע DC מעבר לנקודה C.

$\measuredangle A_1=180^\circ-\alpha$ (זוויות צמודות סכומן 180°)

$\Downarrow$

$\measuredangle A_1=\measuredangle D=\beta$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$\Downarrow$

$\boxed{AB||DC}$ (אם הזוויות המתאימות שוות, אזי הישרים מקבילים)

$\measuredangle C_1=180^\circ-\alpha$ (זוויות צמודות סכומן 180°)

$\Downarrow$

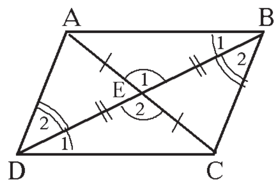
$\measuredangle C_1=\measuredangle D=\beta$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$\Downarrow$

$\boxed{BC||AD}$ (אם הזוויות המתאימות שוות אזי הישרים מקבילים).

מש״ל

ג. אם במרובע האלכסונים חוצים זה את זה, אזי הוא מקבילית.



נתון: ABCD מרובע, $AE = CE$, $BE = DE$.

צ״ל: ABCD מקבילית ($AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$).

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle ABE$ ו- $\triangle CDE$

צ. $AE = CE$ (נתון)

ז. $\measuredangle E_1 = \measuredangle E_2$ (זוויות קודקודיות שוות)

צ. $BE = DE$ (נתון)

$\Downarrow$

$\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$\measuredangle B_1 = \measuredangle D_1$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

$\boxed{AB \parallel DC}$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

באותו אופן ניתן להוכיח כי: $\triangle CBE \cong \triangle ADE$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$\measuredangle B_2 = \measuredangle D_2$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

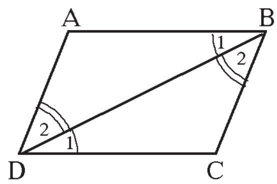
$\boxed{AD \parallel BC}$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

מש״ל

ד. **מרובע, שבו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות, הוא מקבילית.**

נתון: ABCD מרובע, $AB = DC$, $AB \parallel DC$.

צ"ל: ABCD מקבילית ($BC \parallel AD$).



הוכחה:

בניית עזר: נעביר אלכסון BD.

נתבונן במשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle CDB$.

צ. $AB = DC$ (נתון)

$AB \parallel DC$ (נתון)

$\Downarrow$

ז. $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle D_1$ (זוויות מתחלפות בין מקבילים)

צ. $BD = BD$ (צלע משותפת)

$\Downarrow$

$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$\sphericalangle B_2 = \sphericalangle D_2$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

$\boxed{AD \parallel BC}$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

מש"ל

מלבן

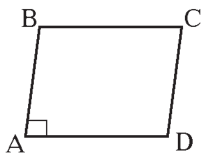
(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 בעמ׳ 249

ב. **אם במקבילית זווית אחת ישרה, אזי הוא מלבן**

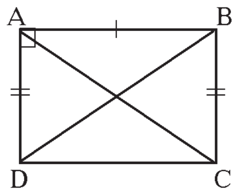
נתון: ABCD מקבילית, $\sphericalangle A=90^\circ$

צ"ל: ABCD מלבן.



הוכחה:

טענה	נימוק
$\sphericalangle A=90^\circ$	נתון
$\sphericalangle A=\sphericalangle C$	זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו
$\Downarrow$	
$\boxed{\sphericalangle A=\sphericalangle C = 90^\circ}$	
$\sphericalangle A+\sphericalangle B=180^\circ$	סכום זוויות סמוכות במקבילית שווה ל- 180°
$\Downarrow$	
$90^\circ+\sphericalangle B=180^\circ$	הצבת גודל תמורת גודל השווה לו
$\Downarrow$	
$\boxed{\sphericalangle B = 90^\circ}$	
$\Downarrow$	
$\sphericalangle A=\sphericalangle C=\sphericalangle B=90^\circ$	
$\Downarrow$	
ABCD מלבן	אם במרובע שלוש זוויות ישרות אזי גם הרביעית ישרה והמרובע הוא מלבן מש"ל



ד. במלבן האלכסונים שווים.

נתון: ABCD מלבן.

צ"ל: $AC = BD$.

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle BAD$ ו– $\triangle ABC$.

צ. $AB = AB$ (צלע משותפת)

ז. $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = 90^\circ$ (הזוויות במלבן ישרות)

צ. $AD = BC$ (הצלעות הנגדיות במלבן שוות)

$\Downarrow$

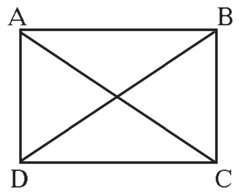
$\triangle BAD \cong \triangle ABC$ (לפי המשפט צ.ז.צ)

$\Downarrow$

$AC = BD$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה

מש"ל

תרגיל 20 בעמ׳ 255



ב. אם במקבילית האלכסונים שווים זה לזה אזי היא מלבן.

נתון: ABCD מקבילית, $AC=BD$

צ"ל: ABCD מלבן.

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle ABD$ ו– $\triangle BAC$.

צ. $AB = AB$ (צלע משותפת)

צ. $AD = BC$ (צלעות נגדיות במקבילית שוות)

צ. $AC = BD$ (נתון)

$\Downarrow$

$\triangle ABD \cong \triangle BAC$ (לפי משפט חפיפה צ.צ.צ.)

$\Downarrow$

$\measuredangle BAD = \measuredangle ABC$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\measuredangle BAD + \measuredangle ABC = 180^\circ$ (סכום שתי זוויות סמוכות במקבילית שווה ל– 180°)

$\measuredangle BAD + \measuredangle BAD = 180^\circ$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$2\measuredangle BAD = 180^\circ \quad /:2$

$\Downarrow$

$\measuredangle BAD = 90^\circ$

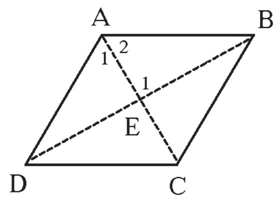
$\Downarrow$

ABCD מלבן (מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה היא מלבן)

מש"ל

מעוין
(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 עמ' 264



ב.
- **אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה.**
- **אלכסוני המעוין חוצים את זוויותיו.**

נתון: ABCD מעוין.

צ"ל: $AC \perp BD$ (מספיק להוכיח כי $\sphericalangle E_1=90°$)

$\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_2$ (לגבי הזוויות האחרות, $\sphericalangle B_1=\sphericalangle B_2$, $\sphericalangle C_1=\sphericalangle C_2$, $\sphericalangle D_1=\sphericalangle D_2$

ההוכחה היא זהה, לכן נסתפק בהוכחה לגבי זווית $\sphericalangle A$ בלבד).

הוכחה:

$AB=AD$ (במעוין הצלעות שוות)

$DE=EB$ (במעוין האלכסונים חוצים זה את זה)

$\Downarrow$

AE תיכון לבסיס במשולש שווה–שוקיים $\triangle ABD$

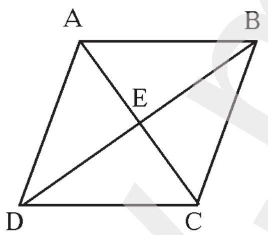
$\Downarrow$

$\boxed{\sphericalangle E_1=90°}$ (תיכון לבסיס במשולש שווה–שוקיים הוא גם גובה לבסיס)

$\boxed{\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_2}$ (תיכון לבסיס במשולש שווה–שוקיים הוא גם חוצה זווית הראש).

מש"ל

תרגיל 14 בעמ' 268



א. מקבילית, שאלכסוניה מאונכים, היא מעוין.

נתון: ABCD מקבילית ($AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$),

$BD \perp AC$.

צ"ל: ABCD מעוין.

הוכחה:

$BD \perp AC$ (נתון)

$DE = EB$ (במקבילית האלכסונים נחצים)

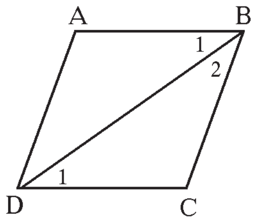
$\Downarrow$

$AB = AD$ (אם במשולש הגובה לצלע הוא גם התיכון לאותה צלע, המשולש שווה–שוקיים)

$\Downarrow$

ABCD מעוין (מקבילית, ששתי צלעותיה הסמוכות שוות, היא מעוין)

מש"ל



ב. מקבילית, שבה אלכסון חוצה זווית, היא מעוין.

נתון: ABCD מקבילית ($AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$),

$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$.

צ"ל: ABCD מעוין.

הוכחה:

$AB \parallel DC$ (נתון)

$\Downarrow$

$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle D_1$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$ (נתון)

$\Downarrow$

$\sphericalangle B_2 = \sphericalangle D_1$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$\Downarrow$

$\triangle DBC$ שווה–שוקיים (אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה–שוקיים)

$\Downarrow$

$BC = DC$ (השוקיים שוות במשולש שווה–שוקיים)

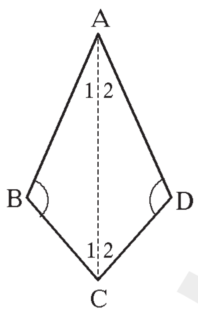
$\Downarrow$

ABCD מעוין (מקבילית, ששתי צלעותיה הסמוכות שוות, היא מעוין)

מש"ל

דלתון
(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 בעמ' 293



א.
- **בדלתון, הזוויות שאינן זוויות הראש, שוות זו לזו.**
- **האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש.**

נתון:

ABCD דלתון ($AB=AD$, $CB=CD$)

צ"ל: (1) $\sphericalangle B=\sphericalangle D$

(2) $\sphericalangle A_1=\sphericalangle A_2$, $\sphericalangle C_1=\sphericalangle C_2$

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ADC$.

צ. $AB = AD$ (נתון)

צ. $CB = CD$ (נתון)

צ. $AC = AC$ (צלע משותפת)

$\Downarrow$

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (לפי המשפט צ.צ.צ.)

$\Downarrow$

$\sphericalangle B = \sphericalangle D$

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$

מש"ל

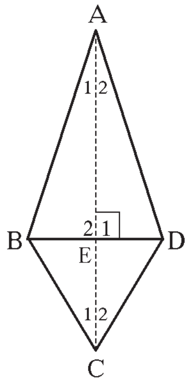
ב. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

נתון: ABCD דלתון ($AB=AD$, $CB=CD$)

צ"ל: (1) $BE=ED$

(2) $AC\perp BD$

הוכחה:



(1) $AB = AD$ (נתון)

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (הוכחנו בסעיף א')

$\Downarrow$

$BE = ED$ (במשולש שו"ש חוצה זווית הראש הוא גם תיכון)

(2) $AB = AD$ (נתון)

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (הוכחנו בסעיף א')

$\Downarrow$

$AC \perp BD$ (במשולש שו"ש חוצה זווית הראש הוא גם גובה)

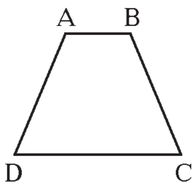
מש"ל

טרפז

(הוכחות משפטים)

תרגיל 16 בעמ' 309

א. בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות.



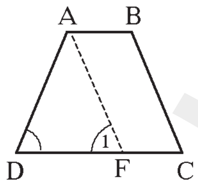
נתון: ABCD טרפז שווה שוקיים

($AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$, $AD = BC$).

צ"ל: $\measuredangle A = \measuredangle B$, $\measuredangle D = \measuredangle C$.

הוכחה:

בניית עזר: נעביר מקביל לשוק BC דרך הנקודה A, $AF \parallel BC$.



$AB \parallel FC$ ($AB \parallel DC$ ו-FC חלק מ-DC)

$AF \parallel BC$ (בניית עזר)

$\Downarrow$

ABCF מקבילית

$\Downarrow$

$BC = AF$ (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)

$AD = BC$ (נתון)

$\Downarrow$

$AD = AF$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)

$\Downarrow$

$\measuredangle D = \measuredangle F_1$ (זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות)

$\measuredangle F_1 = \measuredangle C$ (זוויות מתאימות בין מקבילים)

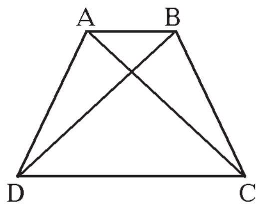
$\Downarrow$

$\measuredangle D = \measuredangle C = \alpha$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)

$\Downarrow$

$\measuredangle A = \measuredangle B = 180^\circ - \alpha$ (בטרפז סכום שתי זוויות הסמוכות שליד אותה שוק, הוא 180°)

מש"ל



ב. בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

נתון: ABCD טרפז שווה שוקיים,
($AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$, $AD = BC$).

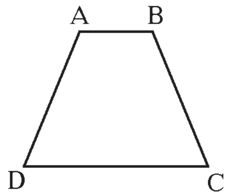
צ״ל: $DB = CA$.

הוכחה:

נתבונן במשולשים $\triangle BDC$ ו- $\triangle ACD$.

צ. $CD = CD$ (צלע משותפת)
ז. $\measuredangle DCB = \measuredangle CDA$ (בטרפז שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות)
צ. $BC = AD$ (נתון)
$\Downarrow$
$\triangle BDC \cong \triangle ACD$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)
$\Downarrow$
$DB = CA$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)
מש״ל

תרגיל 28 בעמ׳ 313

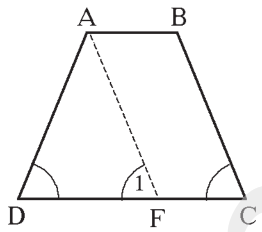


א. טרפז, שיש לו זוג זוויות בסיס שוות הוא טרפז שווה שוקיים.

נתון: ABCD טרפז ($AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$) , $\measuredangle D = \measuredangle C$.

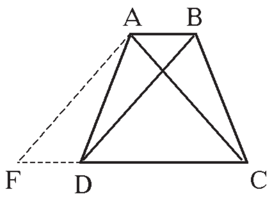
צ״ל: $AD = BC$.

הוכחה:



בניית עזר: נעביר מקביל לשוק BC דרך הנקודה A,
כך שיתקבל $AF \parallel BC$.

$AB \parallel FC$ ($AB \parallel DC$ ו-FC חלק מ-DC)
$AF \parallel BC$ (בניית עזר)
$\Downarrow$
ABCF מקבילית
$\Downarrow$
$\measuredangle C = \measuredangle F_1$ (זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים)
$\measuredangle C = \measuredangle D$ (נתון)
$\Downarrow$
$\measuredangle F_1 = \measuredangle D$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)
$\Downarrow$
$\triangle ADF$ שווה-שוקיים (אם במשולש שתי זוויות שוות, אזי המשולש שווה-שוקיים)
$AD = AF$ (במשולש מול הזוויות השוות מונחות הצלעות שוות)
$AF = BC$ (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)
$\Downarrow$
$AD = BC$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)
מש״ל



ב. טרפז, שאלכסוניו שווים, הוא טרפז שווה שוקיים.

נתון: ABCD טרפז ($AB \parallel DC$, $AD \nparallel BC$), $BD = AC$.

צ״ל: $BC = AD$.

הוכחה:

בניית עזר: נעביר מקביל ל– BD דרך הנקודה A
($AF \parallel BD$), החותך את המשך הצלע DC בנקודה F.

$AB \parallel FD$ (נתון – FD המשכו של DC)

$BD \parallel AF$ (בניית עזר)

$\Downarrow$

ABDF מקבילית

$\Downarrow$

$BD = AF$ (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)

$BD = AC$ (נתון)

$\Downarrow$

$AC = AF$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)

$\Downarrow$

$\measuredangle F = \measuredangle ACD$ (זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות)

$\measuredangle F = \measuredangle BDC$ (זוויות מתאימות בין מקבילים)

$\Downarrow$

ז. $\measuredangle BDC = \measuredangle ACD$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)

צ. $DC = DC$ (צלע משותפת)

צ. $BD = AC$ (נתון)

$\Downarrow$

$\triangle BCD \cong \triangle ADC$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

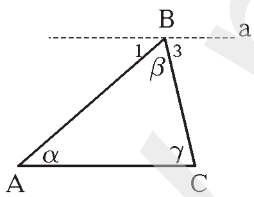
$BC = AD$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)

מש״ל

סכום הזוויות במצולע

(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 עמ׳ 339



סכום הזוויות במשולש שווה ל– 180°.

נתון: $\triangle ABC$.

צ״ל: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

הוכחה:

בניית עזר: נעביר ישר a דרך הנקודה B כך שיתקבל $a \parallel AC$.

$\measuredangle B_3 = \gamma$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

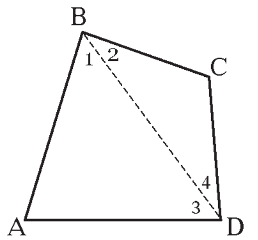
$\measuredangle B_1 = \alpha$ (זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים)

$\beta + \measuredangle B_1 + \measuredangle B_3 = 180^\circ$ (זוויות המשלימות לזווית שטוחה)

$\Downarrow$

$\beta + \alpha + \gamma = 180^\circ$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

מש״ל



תרגיל 17 בעמ׳ 342

סכום הזוויות הפנימיות במרובע שווה ל־ 360°.

נתון: מרובע ABCD.

צ"ל: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360^\circ$.

הוכחה:

בניית עזר: נעביר אלכסון BD.

$\measuredangle A + \measuredangle 1 + \measuredangle 3 = 180^\circ$ (סכום הזוויות במשולש $\triangle ABD$ שווה ל־ 180°)

$\measuredangle C + \measuredangle 2 + \measuredangle 4 = 180^\circ$ (סכום הזוויות במשולש $\triangle BCD$ שווה ל־ 180°)

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle A+\measuredangle 1+\measuredangle 3+\measuredangle C+\measuredangle 2+\measuredangle 4=180^\circ+180^\circ=360^\circ$$

$$\measuredangle B = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$$

$$\measuredangle D = \measuredangle 3 + \measuredangle 4$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle D = 360^\circ$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

מש"ל

תרגיל 28 בעמ׳ 345

סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180^\circ \cdot (n - 2)$.

הוכחה:

במצולע בעל n צלעות נבחר קודקוד כלשהו. מקודקוד זה ניתן להעביר $n - 3$ אלכסונים, והם מחלקים את המצולע ל־ $n-2$ משולשים (מספר האלכסונים קטן ב־ 1 ממספר המשולשים).

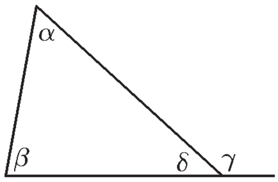
לכן סכום הזוויות במצולע הקמור הוא $180^\circ \cdot (n - 2)$.

מש"ל

זווית חיצונית למצולע קמור

(הוכחות משפטים)

תרגיל 4 בעמ' 351



זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

נתון: γ – זווית חיצונית למשולש,

β, α – זוויות פנימיות של המשולש.

צ"ל: $\gamma = \alpha + \beta$.

הוכחה:

$\delta + \gamma = 180°$ (זוויות צמודות)

$\alpha + \beta + \delta = 180°$ (סכום הזוויות במשולש 180°)

$\Downarrow$

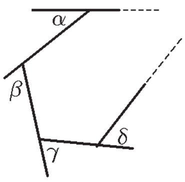
$\alpha + \beta + \delta = \delta + \gamma$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$\Downarrow$

$\alpha + \beta = \gamma$ (חיסור גדלים שווים מגדלים שווים)

מש"ל

תרגיל 24 בעמ' 355

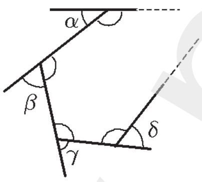


ה. סכום הזוויות החיצוניות למצולע (קמור), הנמצאות במגמה אחת הוא 360°.

נתון: מצולע בעל n צלעות.

צ"ל: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots=360°$

הוכחה:



לכל זווית פנימית במצולע יש זווית שצמודה לה (שהיא בעצם זווית חיצונית למצולע).

הזוויות הללו מהוות ביחד זווית שטוחה (ראו סרטוט).

במצולע בעל n צלעות יש n זוויות פנימיות,

ולכן ניתן ליצור n זוויות שטוחות.

הגודל של כל אחת מ-n הזוויות השטוחות הוא 180°.

סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות

הוא $180°(n-2)$, ולכן סכום הזוויות החיצוניות יהיה ההפרש הבא:

$$180°n-180°(n-2)=180°n-180°n+360°=360°$$

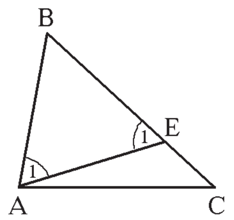
מש"ל

היחס בין צלעות לזוויות במשולש

(הוכחות משפטים)

תרגיל 2 בעמ׳ 361

א. במשולש מול הצלע הגדולה ביותר נמצאת הזווית הגדולה ביותר.



נתון: $BC > BA$.

צ״ל: $\measuredangle BAC > \measuredangle C$.

הוכחה:

בניית עזר: נקצה על הצלע BC קטע BE,

כך שיתקיים $BE = BA$, ונסרטט את הקטע AE.

$BA = BE$ (בניית עזר)

$\measuredangle A_1 = \measuredangle E_1$ (זוויות בסיס במשולש שווה–שוקיים שוות)

$\measuredangle E_1 > \measuredangle C$ (זווית חיצונית במשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה)

$\Downarrow$

$\measuredangle A_1 > \measuredangle C$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

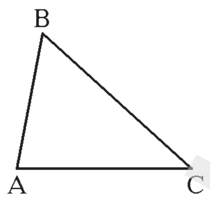
$\measuredangle BAC > \measuredangle A_1$ ($\measuredangle A_1$ היא חלק מ- $\measuredangle BAC$)

$\Downarrow$

$\measuredangle BAC > \measuredangle C$

מש״ל

ב. במשולש מול הזווית הגדולה ביותר נמצאת הצלע הגדולה ביותר.



נתון: $\measuredangle A > \measuredangle C$.

צ״ל: $BC > AB$.

הוכחה (בדרך השלילה):

הקטעים AB ו- BC יכולים להיות באחד משלושת המצבים הבאים:

א. $BC = AB$ ב. $BC < AB$ ג. $BC > AB$

א. $BC = AB \implies \measuredangle A = \measuredangle C$ (במשולש שו״ש זוויות הבסיס שוות)

אבל זה סתירה לנתון.

ב. $BC < AB \implies \measuredangle A < \measuredangle C$ (במשולש מול הצלע הגדולה ביותר נמצאת הזווית הגדולה ביותר)

אבל זה סתירה לנתון.

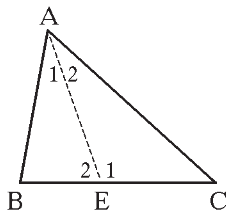
לכן ג׳ נכון, כלומר: $BC > AB$

מש״ל

סכום שתי צלעות במשולש

(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 בעמ׳ 368



ה. **סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.**

נתון: $\triangle ABC$.

צ"ל: $AB + AC > BC$.

הוכחה:

בניית עזר: נעביר את AE שהוא חוצה הזווית $\measuredangle BAC$.

$\measuredangle E_1 > \measuredangle A_1$ (זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית שאינה צמודה לה).

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (בניית עזר)

$\Downarrow$

$\measuredangle E_1 > \measuredangle A_2$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

$\Downarrow$

$AC > EC$ (ב– $\triangle AEC$ מול הזווית הגדולה מונחת הצלע הגדולה)

באותו אופן ניתן להוכיח כי:

$\measuredangle E_2 > \measuredangle A_1$

$\Downarrow$

$AB > BE$ (ב– $\triangle ABE$ מול הזווית הגדולה מונחת הצלע הגדולה)

$\Downarrow$

$AC+AB>EC+BE$

$AC + AB > BC$ (הצבת גודל תמורת גודל השווה לו)

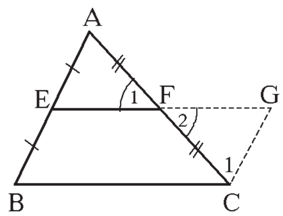
מש"ל

קטע אמצעים במשולש

(הוכחות משפטים)

תרגיל 1 בעמ׳ 374

ג. **קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית, ושווה למחציתה.**



נתון: $AE = EB$, $AF = FC$.

צ״ל: $EF \parallel BC$, $EF = \frac{BC}{2}$.

הוכחה:

בניית עזר: נאריך את הקטע EF עד לנקודה G כך שיתקיים $EF = FG$, ונחבר את G עם C.

צ. $EF = FG$ (בניית עזר)

ז. $\sphericalangle F_1 = \sphericalangle F_2$ (זוויות קודקודיות שוות)

צ. $AF = FC$ (נתון)

$\Downarrow$

$\triangle AFE \cong \triangle CFG$ (לפי המשפט צ.ז.צ.)

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = \sphericalangle C_1$ (במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה)

$\Downarrow$

$AB \parallel GC$ (אם הזוויות המתחלפות שוות, אזי הישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$\boxed{EB \parallel GC}$ (EB חלק מ–AB)

$CG = AE$ (במשולשים חופפים הצלעות שוות בהתאמה)

$AE = BE$ (נתון)

$\Downarrow$

$\boxed{BE = CG}$ (שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)

$\Downarrow$

EGCB מקבילית (מרובע, שבו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות, הוא מקבילית)

$\Downarrow$

$EG \parallel BC$ (הצלעות הנגדיות במקבילית מקבילות)

$\boxed{EF \parallel BC}$ (EF חלק מ– EG)

$EF = FG = x$ (בניית עזר)

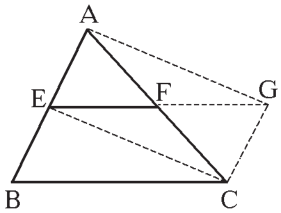
$EG = BC = 2x$ (הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)

$\Downarrow$

$$\boxed{EF = \frac{BC}{2} = x}$$

מש״ל

תרגיל 20 בעמ' 379



קטע במשולש, היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).

נתון: AE = EB, EF || BC.

צ"ל: AF = FC.

הוכחה:

בניית עזר: דרך הנקודה C נעביר מקביל ל- AB, החותך את המשך הקטע EF בנקודה G (CG || BA).

נעביר את הקטעים AG ו- EC.

CG || BA	(בניית עזר)
EF || BC	(נתון)
⇓	
EG || BC	(FG המשך EF)
⇓	
EGCB מקבילית	(מרובע שצלעותיו הנגדיות מקבילות)
⇓	
GC = EB	(הצלעות הנגדיות במקבילית שוות)
AE = EB	(נתון)
⇓	
GC = AE	(שני גדלים השווים לגודל שלישי שווים ביניהם)
GC || AE	(בניית עזר)
⇓	
GCEA (מקבילית)	(מרובע, שבו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות, הוא מקבילית)
⇓	
AF = FC	(האלכסונים במקבילית נחצים)

מש"ל