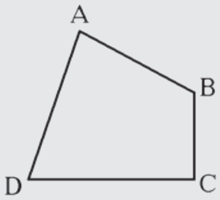
נספח ג' – סיכומים

בנספח זה מופיעות תשובות לתרגילים המסכמים הנמצאים בסוף כל פרק בגיאומטריה.
מטרת הנספח היא לאפשר חזרה על כל הכללים והתכונות שנלמדו בגיאומטריה.

מקבילית

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 56 עמ' 242)



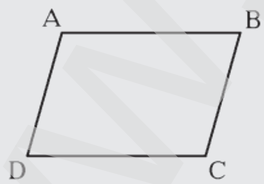
- **מצולע בעל ארבע צלעות נקרא מרובע.**

√ צלעות סמוכות – צלעות שיש להן קודקוד משותף.
לדוגמה: BC ו–CD.

√ צלעות נגדיות – צלעות שאין להן קודקוד משותף.
לדוגמה: AB ו–CD.

√ זוויות סמוכות – שתי זוויות המונחות ליד אותה צלע.
לדוגמה: $\sphericalangle B$ ו–$\sphericalangle C$.

√ זוויות נגדיות – שתי זוויות שאינן מונחות ליד אותה צלע.
לדוגמה: $\sphericalangle A$ ו–$\sphericalangle C$.



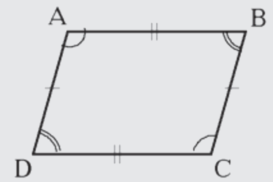
- **מרובע, שבו כל זוג של צלעות נגדיות מקבילות נקרא מקבילית.**

$AB \parallel DC$
$BC \parallel AD$

מקבילית המשך

תכונות המקבילית:

√ במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות
זו לזו:



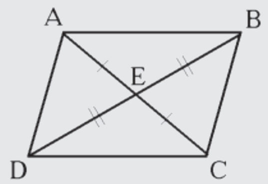
$AD=BC$, $AB=DC$.

√ במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו:
$\sphericalangle A=\sphericalangle C$, $\sphericalangle B=\sphericalangle D$.

√ במקבילית סכומן של כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$:

$\sphericalangle A+\sphericalangle B=180°$, $\sphericalangle B+\sphericalangle C=180°$,

$\sphericalangle C+\sphericalangle D=180°$, $\sphericalangle D+\sphericalangle A=180°$.

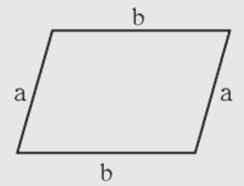


√ במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה:
$AE=EC$, $BE=ED$.

- **כדי שמרובע יהיה מקבילית, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:**

1. כל שתי צלעותיו הנגדיות מקבילות זו לזו.
2. כל שתי צלעותיו הנגדיות שוות זו לזו.
3. שתי צלעות נגדיות גם שוות וגם מקבילות זו לזו.
4. כל שתי זוויותיו הנגדיות שוות זו לזו.
5. אלכסוניו חוצים זה את זה.

מקבילית המשך

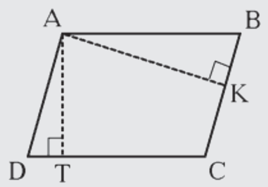


- **היקף המקבילית** (כמו בכל מצולע)

  הוא סכום אורכי כל צלעותיו.

  מסמנים את ההיקף באות P.

  $P=2(a+b)$ או $P=2a+2b$



- **שטח המקבילית** שווה למכפלת צלע בגובה

  לאותה צלע.

  מסמנים את השטח באות S.

  $S=DC\cdot AT$ או $S=BC\cdot AK$

משפטים הקשורים לתכונות המקבילית	משפטים (חלקם הפוכים) הקובעים מהו התנאי כדי שמרובע יהיה מקבילית
במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו	מרובע, שכל שתי צלעותיו הנגדיות שוות, הוא מקבילית
במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו	מרובע, שכל שתי זוויותיו הנגדיות שוות, הוא מקבילית
במקבילית סכומן של כל שתי זוויות סמוכות הוא $180°$	רשות – האם תוכלו לנסח משפט הפוך למשפט שמימין
במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה	מרובע, שאלכסוניו נחצים, הוא מקבילית
רשות – האם תוכלו לנסח משפט, שהמשפט ההפוך לו הוא המשפט שמשמאל	מרובע, שבו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות, הוא מקבילית

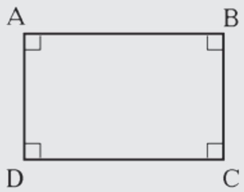
מלבן

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 35 עמ' 259)

- **מרובע, ששלוש זוויותיו ישרות, הוא מלבן.**
- **מקבילית, שאחת מזוויותיה ישרה, נקראת מלבן.**

$\left\{\begin{array}{l}\text{ABCD הוא מקבילית} \\ \measuredangle D=90^\circ\end{array}\right. \Leftarrow$ ABCD הוא מלבן

תכונות המלבן



√ במלבן כל הזוויות ישרות:

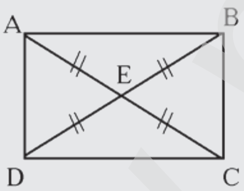
$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90^\circ$

√ במלבן הצלעות הנגדיות מקבילות:

$AB \| DC$, $BC \| AD$

√ במלבן הצלעות הנגדיות שוות:

$AB = DC$, $BC = AD$.

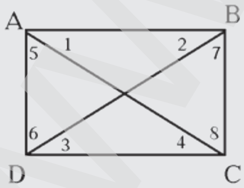


√ במלבן האלכסונים חוצים זה את זה

ושווים זה לזה:

$AC = BD$,

$AE = BE = CE = DE$



√ במלבן מתקיימים בין הזוויות השוויונות הבאים:

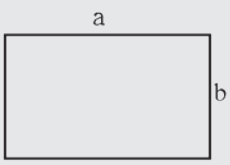
$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3 = \measuredangle 4$

$\measuredangle 5 = \measuredangle 6 = \measuredangle 7 = \measuredangle 8$

מלבן – המשך

- כדי שמרובע יהיה מלבן, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:

1. מרובע שכל זוויותיו ישרות. למעשה די בשלוש זוויות ישרות.
2. מקבילית שאחת מזוויותיה ישרה.
3. מקבילית שאלכסוניה שווים.

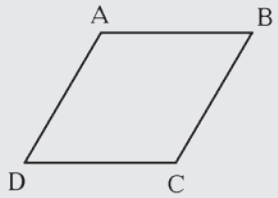


- **היקף המלבן** (כמו במקבילית) הוא פעמיים סכום שתי הצלעות הסמוכות: $P = 2\cdot(a+b)$.

- **שטח המלבן** הוא מכפלת שתי הצלעות הסמוכות: $S = a\cdot b$.

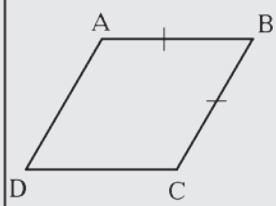
מעוין

(תשובה לתרגיל מסכם מס׳ 35 עמ׳ 274)



- **מרובע, שכל צלעותיו שוות, נקרא מעוין.**

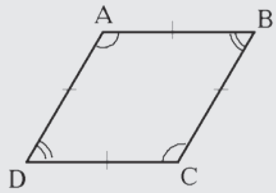
$AB = BC = CD = DA \Leftarrow$ ABCD מעוין.



√ **מקבילית, שבה שתי צלעות סמוכות שוות זו לזו, היא מעוין.**

ABCD הוא מקבילית, $AB = BC$ $\Leftarrow$ ABCD מעוין

תכונות המעוין



√ במעוין כל הצלעות שוות (בהתאם להגדרת המעוין):

$AB = BC = CD = DA$.

√ במעוין כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו:

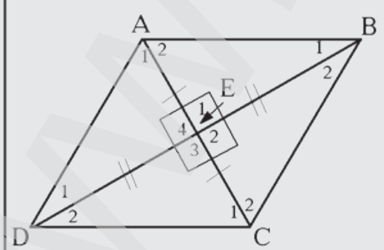
$\sphericalangle A = \sphericalangle C$,

$\sphericalangle B = \sphericalangle D$.

√ במעוין סכומן של כל שתי זוויות סמוכות הוא 180°:

$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$, $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$,

$\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$, $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$.



√ במעוין האלכסונים חוצים זה את זה, מאונכים זה לזה, וחוצים את זוויות המעוין: $AE = EC$, $BE = ED$,

$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2 = \sphericalangle E_3 = \sphericalangle E_4 = 90^\circ$

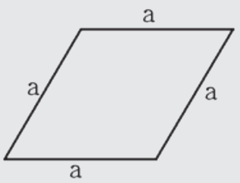
מעוין – המשך

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$

$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$

- **כדי שמרובע יהיה מעוין, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:**

1. מרובע שכל צלעותיו שוות .
2. מקבילית ששתי צלעותיה הסמוכות שוות.
3. מקבילית שאלכסוניה מאונכים.
4. מקבילית שבה אלכסון אחד חוצה זווית אחת.

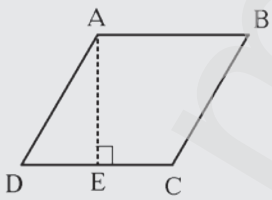


- **היקף המעוין** שווה למכפלת אורך צלע המעוין ב-4:

$P = 4 \cdot a$

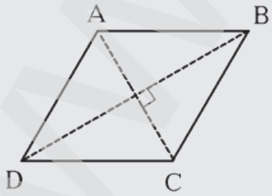
או

$P = a + a + a + a$



- **שטח המעוין** שווה למכפלת צלע בגובה.

$S = DC \cdot AE$



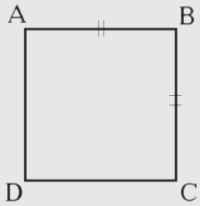
אפשרות נוספת לחישוב שטח המעוין:

מחצית מכפלת האלכסונים.

$S = \frac{DB \cdot AC}{2}$

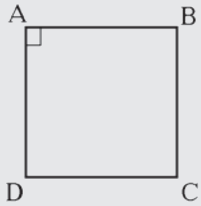
ריבוע

(תשובה לתרגיל מסכם מס׳ 29 עמ׳ 287)



- **מרובע בעל ארבע צלעות שוות זו לזו ואַרבע זוויות ישרות נקרא ריבוע.**
- **מלבן, ששתיים מצלעותיו הסמוכות שוות, הוא ריבוע.**

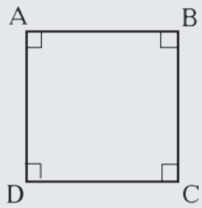
$$\left.\begin{array}{r}\text{ABCD הוא מלבן}\\ AB = BC\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD ריבוע}$$



- **מעוין, שאחת מזוויותיו ישרה, הוא ריבוע.**

$$\left.\begin{array}{r}\text{ABCD הוא מעוין}\\ \angle A = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD ריבוע}$$

תכונות הריבוע

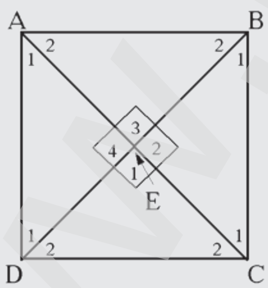


√ בריבוע כל הזוויות שוות.

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

√ בריבוע כל הצלעות שוות.

$$AB = BC = CD = DA$$



√ בריבוע האלכסונים:

חוצים זה את זה ושווים זה לזה:

$AE = BE = CE = DE$.

מאונכים זה לזה:

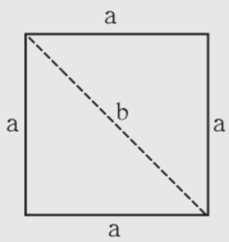
$\angle E_1 = \angle E_2 = \angle E_3 = \angle E_4 = 90^\circ$.

חוצים את זוויות הריבוע:

$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle B_1 = \angle B_2 = \angle C_1 = \angle C_2 = \angle D_1 = \angle D_2 = 45^\circ.$$

ריבוע – המשך

- כדי שמרובע יהיה ריבוע, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:
  1. מרובע שכל צלעותיו וכל זוויותיו שוות.
  2. מלבן ששתיים מצלעותיו הסמוכות שוות זו לזו.
  3. מלבן שאחד מאלכסוניו חוצה זווית אחת.
  4. מלבן שאלכסוניו מאונכים זה לזה.
  5. מעוין בעל זווית ישרה.
  6. מעוין שאלכסוניו שווים לזה.



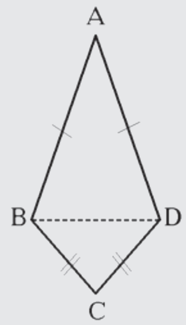
- **היקף הריבוע** שווה למכפלת צלע הריבוע ב-4: $P = 4 \cdot a$.
- **שטח הריבוע** שווה למכפלת צלע הריבוע בעצמה: $S = a \cdot a = a^2$.

  אפשרות נוספת לחישוב שטח הריבוע:

  מחצית ריבוע אורך האלכסון: $S = \frac{b^2}{2}$.

דלתון

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 24 עמ' 300)



- מרובע בעל שני זוגות נפרדים של צלעות סמוכות השוות זו לזו נקרא דלתון.

$$\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases} \Leftarrow ABCD \text{ דלתון}$$

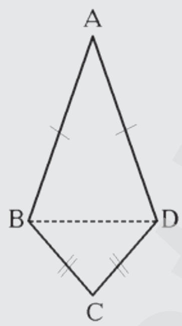
לכן דלתון הוא מרובע שמורכב משני משולשים שווי–שוקיים בעלי בסיס משותף.

המשולשים הם:

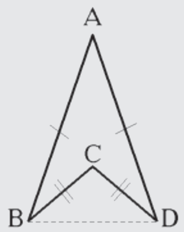
$(AB=AD)\ \triangle ABD$

$(CB=CD)\ \triangle BCD$

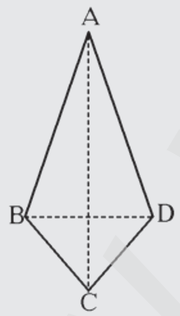
הבסיס המשותף: BD.



דלתון קמור

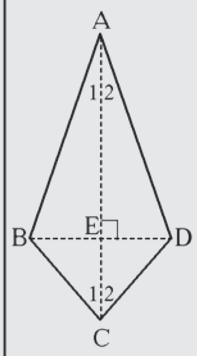


דלתון קעור



- **קודקוד הראש**: קודקוד הנמצא בין שתי הצלעות השוות: קודקודים A ו–C.
- **זוויות הראש** של הדלתון: זוויות הראש של שני המשולשים שווי השוקיים: הזוויות: $\measuredangle BAD$ ו– $\measuredangle BCD$.
- **אלכסון ראשי** בדלתון: האלכסון המחבר את קודקודי הראש של הדלתון: אלכסון AC.
- **אלכסון משני** בדלתון: הבסיס המשותף של המשולשים שווי השוקיים: אלכסון BD.

דלתון – המשך



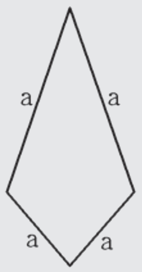
- **האלכסון הראשי בדלתון:**

א. חוצה את זוויות הראש של הדלתון:

$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2 \ , \ \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$

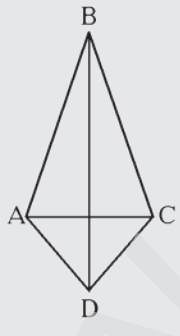
ב. חוצה את האלכסון המשני של הדלתון: $BE=ED$

ג. מאונך לאלכסון המשני של הדלתון: $AC \perp BD$



- **היקף הדלתון**, שאורכי צלעותיו הם a ו-b, הוא:

$P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



- **שטח הדלתון** שווה למחצית מכפלת אלכסוניו:

$S = \frac{BD \cdot AC}{2}$

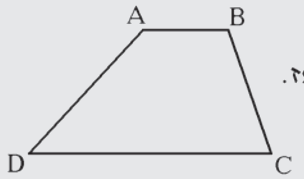
טרפז

(תשובה לתרגיל מסכם מס׳ 49 עמ׳ 319)

- **טרפז הוא מרובע, שבו רק שתיים מצלעותיו הנגדיות מקבילות:**

  $AB \parallel DC$ (מקביל)

  $AD \nparallel BC$ (לא מקביל)

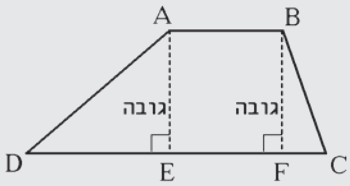


√ שתי הצלעות המקבילות בטרפז נקראות בסיסי הטרפז.

AB נקרא **בסיס קטן**,

DC נקרא **בסיס גדול**.

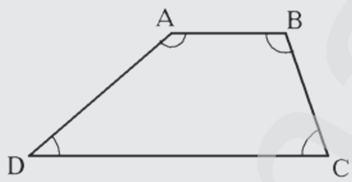
√ שתי הצלעות הנגדיות, שאינן מקבילות בטרפז, נקראות שוקיים. שוק BC , ושוק AD.



√ הקטע, המחבר את בסיסי הטרפז ומאונך להם, נקרא גובה.

AE , BF – גבהים

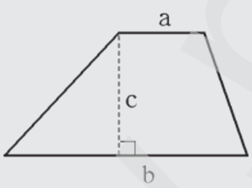
AE = BF – הגבהים בטרפז שווים.



√ סכום שתי הזוויות שליד כל שוק בטרפז הוא 180°:

$\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$

$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$



√ **היקף הטרפז** הוא סכום כל צלעותיו .

√ **שטח טרפז**, שבסיסיו a ו־b וגובהו c,

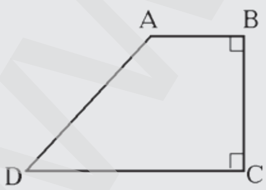
הוא: $S = \frac{(a+b)\cdot c}{2}$

- טרפז, שבו זווית אחת ישרה, נקרא טרפז ישר זווית.

  $AB \parallel DC$

  $AD \nparallel BC$

  $\sphericalangle C = 90^\circ$



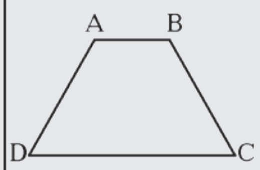
טרפז המשך

√ בטרפז ישר–זווית שתי זוויות ישרות: $\sphericalangle C = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$

ושתי הזוויות האחרות–סכומן 180° : $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$

√ בטרפז ישר–זווית השוק הקצרה היא גובה הטרפז .

הגובה במרובע ABCD הוא הצלע: BC.



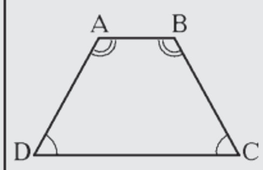
- טרפז, ששוקיו שוות זו לזו, נקרא טרפז שווה–שוקיים.

$AB \parallel DC$

$AD \nparallel BC$

$AD = BC$

√ זוויות הבסיס שוות:



$\sphericalangle A = \sphericalangle B$

$\sphericalangle C = \sphericalangle D$

√ סכום שתי הזוויות ליד כל שוק שווה ל– 180°:

$\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$

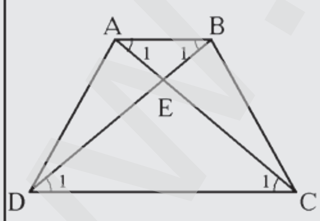
$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$

√ סכום כל שתי זוויות נגדיות שווה ל– 180°:

$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$

$\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$

√ האלכסונים שווים זה לזה: $AC = BD$



√ האלכסונים חותכים זה את זה, כך ש:

$AE = BE$

$DE = CE$

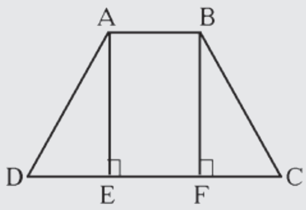
וכן מתקיים: $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle D_1 = \sphericalangle C_1$

טרפז – המשך

√ כאשר מורידים בטרפז שווה–שוקיים גבהים מקצות הבסיס הקטן, מתקבלים שני משולשים חופפים:

$\triangle ADE \cong \triangle BCF$

ובנוסף מתקבל מלבן ABEF.



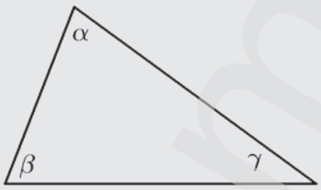
- כדי שטרפז יהיה טרפז שווה–שוקיים, עליו לקיים אחד מהתנאים הבאים:
  1. טרפז ששוקיו שוות.
  2. טרפז שזוויות הבסיס שלו שוות.
  3. טרפז שאלכסוניו שווים.

סכום הזוויות במצולע

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 32 עמ' 346)

- **סכום הזוויות במשולש שווה ל–** $180°$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



- **סכום הזוויות הפנימיות במרובע שווה ל–** $360°$:

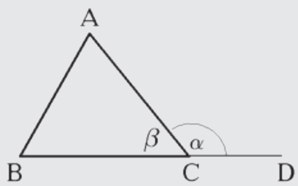
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

- **סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות הוא:**

$180° \cdot (n-2)$.

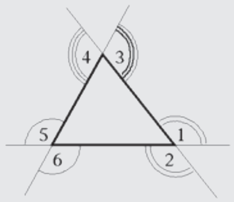
זווית חיצונית למצולע קמור

(תשובה לתרגיל מסכם מס׳ 26 עמ׳ 357)



- **זווית חיצונית למשולש היא זווית הצמודה לזווית פנימית של המשולש.**

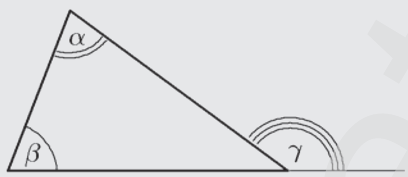
בסרטוט β היא זווית : פנימית.
בסרטוט α היא זווית: חיצונית.



√ לכל משולש שש זוויות חיצוניות:

$\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$, $\measuredangle 3$, $\measuredangle 4$, $\measuredangle 5$, $\measuredangle 6$

ומתקיים: $\measuredangle 6 = \measuredangle 5$, $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$, $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

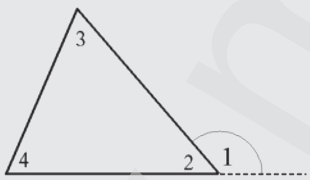


- **זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה:**

$$\gamma = \alpha + \beta$$

β , α – זוויות פנימיות של המשולש.
γ – זווית חיצונית למשולש.

√ **זווית חיצונית למשולש גדולה מכל זווית פנימית, שאינה צמודה לה:**

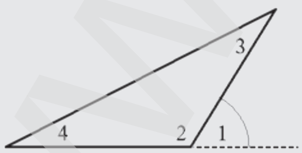


$\measuredangle \mathbf{1} > \measuredangle \mathbf{3}$

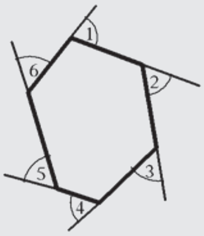
$\measuredangle \mathbf{1} > \measuredangle \mathbf{4}$

הערה

המשפט תקף אך ורק לגבי זוויות פנימיות,
שלא צמודות לזווית החיצונית. זווית פנימית,
שצמודה לזווית החיצונית, לא בהכרח
מקיימת את המשפט, כפי שרואים בציור:
$\measuredangle 1$ לא גדולה מ־$\measuredangle 2$.



זווית חיצונית למצולע קמור – המשך

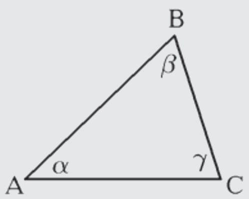


• זווית חיצונית למצולע היא זווית הצמודה לזווית פנימית של המצולע. בסרטוט כל הזוויות החיצוניות למצולע נמצאות באותה המגמה (באותו כיוון, ובמקרה זה בכיוון תנועת מחוג השעון).

√ סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור, הנמצאות במגמה אחת, הוא 360°.

היחס בין צלעות לזוויות במשולש

(תשובה לתרגיל מסכם מס׳ 18 עמ׳ 365)

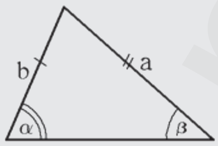


• מול כל צלע במשולש מונחת זווית:

מול הצלע BC מונחת זווית α,

מול הצלע AC מונחת זווית β,

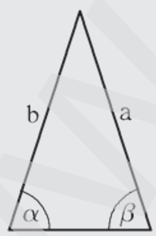
מול הצלע AB מונחת זווית γ.



• **במשולש מול הצלע הגדולה ביותר נמצאת הזווית הגדולה ביותר, ולהפך:**

מול הזווית הגדולה ביותר נמצאת הצלע הגדולה ביותר.

אם: $a > b \iff \alpha > \beta$



• **מול הצלעות השוות במשולש מונחות זוויות שוות, ולהפך:**

מול הזוויות השוות מונחות צלעות שוות.

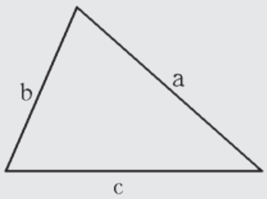
אם: $a = b \iff \alpha = \beta$

הערה: תכונה זו למדנו במסגרת משולש שווה–שוקיים.

סכום שתי צלעות במשולש

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 11 עמ' 370)

- **סכום אורכי שתי צלעות כלשהן במשולש גדול מאורכה של הצלע השלישית:**



$a + b > c$

$a + c > b$

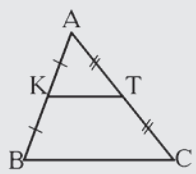
$b + c > a$

הערה: שלושת התנאים חייבים להתקיים בו–זמנית.

קטע אמצעים במשולש

(תשובה לתרגיל מסכם מס' 34 עמ' 382)

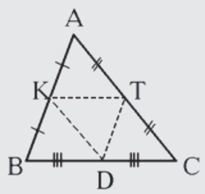
- **קטע, המחבר אמצע צלע אחת במשולש עם אמצע הצלע האחרת במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.**



אם: $\begin{cases} AK = KB \\ AT = TC \end{cases}$

$\Downarrow$

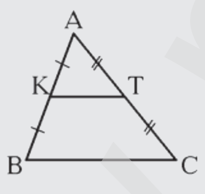
KT הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.



√ בכל משולש ניתן להעביר שלושה קטעי אמצעים.

KD , KT , TD הם קטעי האמצעים במשולש $\triangle ABC$.

- **קטע, המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.**



$$KT \parallel BC$$

$$KT = \frac{BC}{2}$$

- **קטע במשולש, היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לצלע השנייה, חוצה את הצלע השלישית.**

(כלומר הוא קטע אמצעים במשולש.)

$$\begin{cases} AK = KB \\ KT \parallel BC \end{cases} \Longrightarrow AT = TC$$

כלומר KT הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.